Beiträge zur Theorie der Singularitäten der algebraischen Linien-Complexe beliebigen Grades.

Inaugural-Dissertation

der

II. Sektion der philosophischen Fakultät

der

Königlichen Ludwig-Maximilians-Universität München

am 28. Juni 1907

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Mohrmann.

München 1907

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung enthält Beiträge zur Theorie der Singularitäten der algebraischen Linienkomplexe beliebigen Grades. Zu ihrer Untersuchung sind seit dem Erscheinen des großen grundlegenden Pluecker'schen Werkes[1]), von den Untersuchungsmethoden der Kummer'schen Fläche mit Hilfe der Klein'schen elliptischen Koordinaten[2]) abgesehen, vier Systeme von wesentlich voneinander verschiedenen Methoden ausgebildet und angewandt worden:

1. die algebraischen Methoden. Sie zerfallen in zwei Gruppen, solche, welche neben Linienkoordinaten Punkt- und Ebenenkoordinaten benutzen, und solche, welche von rein liniengeometrischen Gesichtspunkten ausgehen;

2. die Methoden der abzählenden Geometrie;

3. die Methoden der synthetischen Geometrie;

4. die Methoden der mehrdimensionalen Geometrie.

Die Methoden der mehrdimensionalen und synthetischen Geometrie sind bislang, von wenigen Sätzen insbesondere über die sogenannte singuläre Fläche[3]) und einigen gelegentlichen Untersuchungen spezieller Komplexe[4]) abgesehen, nur für die Theorie der Komplexe zweiten Grades ausgebildet worden und es scheinen wesentlich

---

[1]) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 1868/69.

[2]) Klein, Zur Theorie der Linienkomplexe ersten und zweiten Grades, Mathem. Ann., Bd. II, S. 213 ff. — Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, Mathem. Annal., Bd. V, S. 295 ff. — Ferner insbesondere Rohn, Transformation der hyperelliptischen Funktion $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche, Mathem. Ann., Bd. XV, S. 335 ff.

[3]) Siehe z. B. Pasch, Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden. Habilitationsschrift. Gießen 1870.

[4]) Siehe z. B. Reye, Die Geometrie der Lage, Bd. III, 1892, 15. Vortrag.

neue Überlegungen erforderlich zu sein, um mit ihrer Hilfe die Theorie der Komplexe höheren Grades zugänglich zu machen. Denn abgesehen davon, daß für Komplexe höheren Grades außer der singulären Fläche noch weitere sechs einander paarweise dualistisch entsprechende kovariante Flächen vorhanden sind, geschieht schon die Bestimmung der Ordnung und der Klasse sowie des Ranges der singulären Fläche, um von komplizierteren Aufgaben, wie z. B. dem Haupttangentenproblem ganz zu schweigen, vermittels der Methoden der synthetischen [5]) und mehrdimensionalen [6]) Geometrie nach Verfahren, welche sich nicht auf Komplexe beliebigen Grades ausdehnen lassen.

Die Methoden der abzählenden Geometrie sind bislang nur für die Singularitäten der ersten Gruppe [7]) ausgebildet worden, d. h. für solche Singularitäten, welchen in der Geometrie des Punktes und der Ebene die „Tangenten-Singularitäten“ [8]) entsprechen. Sie haben für diese eine Reihe von Resultaten geliefert, welche auf algebraischem Wege bisher nicht ermittelt werden konnten. Es scheinen jedoch wesentlich neue Mittel ersonnen werden zu müssen [9]), um auf Grund dieser Methoden zu den Singularitäten der zweiten Gruppe, d. h. denjenigen, welche mit der singulären Fläche verknüpft sind, zu gelangen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die algebraischen Methoden der zweiten Gruppe zu denjenigen der mehrdimensionalen Geometrie in Beziehung gesetzt werden.

Nachdem die Trennung der Liniengeometrie [10]) von der Geometrie

---

[5]) Vgl. hierzu etwa Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Bd. III, 1896, S. 4 ff.

[6]) Siehe Segre, Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Memoria della R. Accademia di Torino, Serie II, T. 36, 1885, S. 78 ff. und Sulla geometria della retta e delle sue serie quadriche (Fortsetzung der ersten Memoria), S. 114 ff.

[7]) Siehe Voß, Über Komplexe und Kongruenzen. Mathem. Annalen, Bd. IX, S. 57.

[8]) Schubert, Tangenten-Singularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. Mathem. Ann., Bd. XI, S. 347 ff.

[9]) Vgl. den Schluß dieses Vorwortes und Kap. V, § 2 der vorliegenden Arbeit.

[10]) Siehe hierüber insbesondere die Vorrede des in der 7. Anmerkung zitierten Aufsatzes und diejenige der folgenden Abhandlung: Voß, Zur Theorie der windschiefen Flächen. Mathem. Ann., Bd. VIII, S. 54 ff.

des Punktes und der Ebene durch die Arbeiten von Herrn F. Klein[11]) angebahnt worden war, gelangten die algebraischen Methoden der zweiten Gruppe vor allem in den Arbeiten von Herrn Voß[12]) auf Grund des Dualitätsgesetzes[13]), das hier zum ersten Male prinzipiell für liniengeometrische Untersuchungen verwandt wurde, zur Entwicklung und Vollendung. Die Methoden der mehrdimensionalen Geometrie hingegen sind von Herrn Segre[14]) ausgebildet worden, welcher den Gedanken F. Kleins, die Liniengeometrie als die Geometrie einer vierdimensionalen Fläche zweiten Grades im Raume von fünf Dimensionen zu betrachten, aufnahm und ausbaute. Durch die Verknüpfung der analytischen Methoden der Liniengeometrie mit denjenigen der mehrdimensionalen Geometrie[15]) — für welche ein von Herrn Voß[16]) gegebenes algebraisches Theorem, das als n-dimensionale Verallgemeinerung bekannter Untersuchungen über das Schnittpunktssystem von zwei Kegelschnitten betrachtet werden kann, den natürlichen Ausgangspunkt bildet — gewinnen die ersteren an Anschaulichkeit, während die letzteren der Theorie der Singularitäten der Komplexe beliebigen Grades dienstbar gemacht werden können. Hieraus resultieren zwei Aufgaben der vorliegenden Arbeit:

1. es sollen *die früheren Untersuchungen über Komplexe zweiten und höheren Grades zugänglicher gemacht werden* und

2. es sollen *gewisse aus der Theorie der Komplexe zweiten Grades bekannte Sätze, insbesondere über konfokale Systeme und Doppellinien auf Komplexe beliebigen Grades ausgedehnt werden.* Eine

3. Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, *eine vollständige Aufzählung der im allgemeinen Falle vorhandenen Typen von Komplex-*

---

[11]) Siehe Anm. 2. — Ferner: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Mathem. Ann., Bd. V, S. 257 ff.

[12]) Siehe Anm. 7 und 10. — Ferner: Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Mathem. Ann., Bd. X, S. 143 ff.

[13]) Die insbesondere in den Vorreden der beiden in der 7. und 10. Anmerkung zitierten Aufsätze enthaltenen Bemerkungen über die in allgemeinen Komplexen herrschende Dualität, welche sich weiter auf alle Gebilde erstreckt, die in dualistischer Weise mit den Geraden des Komplexes in Zusammenhang stehen, werden in der vorliegenden Abhandlung als bekannt vorausgesetzt.

[14]) Siehe Anm. 5.

[15]) In dem eigentlich liniengeometrischen Teile der beiden erwähnten Segre'schen Arbeiten, d. h. in der zweiten Memoria, wird von der Analysis keinerlei Gebrauch gemacht („alcun uso di equazioni non fatto", S. 120, Anm. 1).

[16]) Über Komplexe u. s. w. (s. Anm. 12), S. 70.

kurven bzw. Kegeln eines algebraischen Linienkomplexes beliebigen Grades zu geben, eine Aufgabe, welche sich wie etwa die Frage nach den Tangenten-Singularitäten einer punktallgemeinen Fläche vermöge der Regeln der Kombinatorik allein keineswegs erledigen läßt.

Während die Theorie der Komplexe zweiten Grades seit der Begründung der Liniengeometrie durch Pluecker Gegenstand zahlreicher Abhandlungen gewesen ist, liegen über Komplexe beliebigen Grades nur wenige Arbeiten vor. Es ist hier außer dem erwähnten großen Aufsatze von Herrn Voß, Über Komplexe und Kongruenzen neben Untersuchungen der Herren Clebsch[17]), Klein[18]), Lie[19]) und Pasch[20]) vor allem ein Aufsatz von Herrn Schubert, Singularitäten des Komplexes n^{ten} Grades[21]) zu nennen. Während die Ausführungen von Herrn Voß, soweit sie die Theorie der Singularitäten der Komplexe zum Gegenstand haben, unter Benutzung algebraischer Methoden, vorwiegend die Singularitäten der zweiten Gruppe behandeln und insbesondere eine vollständige Theorie der Singularitäten der singulären Fläche eines Komplexes enthalten, beziehen sich die von Herrn Schubert mit Hilfe des Chasles'schen Korrespondenzprinzipes oder seiner Umformungen gewonnenen Resultate ausschließlich auf die Singularitäten der ersten Gruppe, und zwar sind von Herrn Schubert sämtliche Zahlen berechnet worden, welche sich durch die Betrachtung eines einzelnen Strahlenbüschels, bzw. einer einzelnen Komplex-Strahlengruppe finden lassen. Beide Aufsätze enthalten eine Fülle von Zahlen, welche sich vortrefflich ergänzen. Leider haben diesen Zahlen nur wenige neue hinzugefügt werden können. Es liegt dies an der Unzulänglichkeit der algebraischen Methoden, sobald es sich nicht mehr um vollständige Schnitte oder einfache Eliminationsprozesse handelt. Es muß aber in dieser Arbeit dahingestellt bleiben, ob die große Menge der noch zu berechnenden Zahlen den Methoden der abzählenden Geometrie leichter zugänglich ist. Erwähnt sei

---

[17]) Über die Plueckerschen Komplexe, Mathem. Ann., Bd. II, S. 1 ff.; Über die Komplexflächen und die Singularitätenflächen der Komplexe, Mathem. Ann., Bd. V, S. 435 ff.

[18]) Siehe Anm. 11.

[19]) Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. Mathem. Ann., Bd. V, S. 145 ff.

[20]) Siehe Anm. 3. — Ferner: Über die Brennfläche der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Komplexe. Crelles Journal, Bd. 76.

[21]) Mathem. Ann., Bd. XII, S. 202 ff.

jedoch, daß in vielen Fällen aus der Betrachtung einer einzelnen Strahlengruppe zunächst überhaupt kein Schluß auf die betreffende Singularität gezogen werden kann. So unterscheidet sich z. B. die Strahlengruppe, welche zu einem Wendepunkte[22]) einer Komplexkurve gehört, durch nichts von derjenigen, welche für eine Spitze oder einen Berührungspunkt einer Doppeltangente charakteristisch ist. Die Strahlengruppe eines Selbstberührungspunktes ist selbst unter Hinzuziehung weiterer Strahlengruppen durch nichts von derjenigen einer Schnabelspitze zu unterscheiden.

Dagegen sind in der vorliegenden Arbeit die Untersuchungen soweit geführt worden, daß wenigstens eine vollständige Aufzählung der im allgemeinen Falle möglichen Typen von Komplexkurven gelingt. *Es gibt 113, welche in verschiedenen Kombinationen zwei bis fünf von insgesamt 31 voneinander verschiedenen einzelnen singulären Punkten bzw. Linien besitzen*, wobei ein auf einer Doppel- oder Wendetangente gelegener singulärer Punkt nicht als besonderes singuläres Element bezeichnet worden ist.

Von den übrigen Resultaten der Arbeit ist vielleicht noch zu erwähnen, daß sich vermöge der mehrdimensionalen Geometrie ein einfacher Beweis des Fundamentalsatzes der Flächenkomplexe führen läßt.

Es sei mir endlich gestattet, auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Voß für die vielfache wohlwollende Unterstützung bei der Ausführung der vorliegenden Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

---

[22]) Infolgedessen bezeichnet Herr Schubert (l. c. S. 206) versehentlich die Zahl $\mu^3 \varepsilon_3$, d. h. die Zahl der Rückkehrtangenten einer beliebigen Komplexkurve (als einer allgemeinen Klassenkurve, vgl. Voß, l. c. S. 73) als Zahl ihrer Wendetangenten.

Einleitung.

Die Gesamtheit der geraden Linien des Raumes bildet eine vierfache Mannigfaltigkeit, in welcher Gebilde niederer Stufe enthalten sind.

Ein Strahlenort der ersten Stufe ist als Punktgebilde betrachtet von der zweiten Dimension, eine Regelfläche. Die Ordnung einer algebraischen Regelfläche ist gleich ihrer Klasse und wird durch die Anzahl ihrer Erzeugenden bestimmt, welche eine beliebige gerade Linie des Raumes treffen. Das einfachste Liniengebilde ist demnach die Regelfläche des ersten Grades, d. h. das Strahlenbüschel.

Die Strahlenörter der zweiten Stufe, welche man Strahlensysteme oder Kongruenzen nennt, erfüllen als Punktgebilde betrachtet den ganzen Raum. Für algebraische Strahlensysteme sind daher zwei charakteristische Zahlen gleichberechtigt[23]): Die Anzahl der geraden Linien eines Systems, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes hindurchgehen, bestimmt seine Ordnung und die Anzahl der Strahlen, welche in einer beliebigen Ebene gelegen sind, bestimmt seine Klasse.

Die Strahlenörter der dritten Stufe endlich, die sogenannten Linienkomplexe, haben wiederum nur eine Gradzahl. Sie ist durch die Anzahl der geraden Linien gegeben, welche der Komplex mit einem beliebigen Strahlenbüschel gemein hat. Ein algebraischer Linienkomplex des n^{ten} Grades umfaßt demnach eine dreifache Mannigfaltigkeit von geraden Linien, welche im Raume in einer solchen Art verteilt sind, daß diejenigen geraden Linien, welche durch einen beliebigen festen Punkt hindurchgehen, einen Kegel der

---

23) Vgl. Sturm, l. c., Bd. I, S. 8. — Übrigens hat Herr Schumacher (Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme, Mathem. Ann., Bd. XXXVII, S. 100 ff.) eine dritte, die Art einer Kongruenz charakterisierende Zahl eingeführt. Sie entspricht der Zahl der scheinbaren Doppelpunkte einer allgemeinen Raumkurve.

n^{ten} Ordnung — Komplexkegel — bilden, oder, was dasselbe besagt, daß diejenigen geraden Linien, welche in einer beliebigen festen Ebene gelegen sind, eine Kurve der n^{ten} Klasse — Komplexkurve — umhüllen.

Ihre analytische Darstellung finden die Liniengebilde durch die von J. Pluecker in die Wissenschaft eingeführten Koordinaten der geraden Linie im Raume. Nach Pluecker erhält die gerade Linie sechs homogene Koordinaten, welche eine Bedingungsgleichung zweiten Grades erfüllen. Es besteht demnach bei dieser Auffassung außer der Höhe der Dimension noch ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen der Geometrie der Punkt- oder Ebenengebilde und derjenigen der Liniengebilde: die Liniengeometrie erscheint, wie von F. Klein[24]) zuerst ausgesprochen worden ist, als die Geometrie auf einer vierdimensionalen Fläche der zweiten Ordnung im Raume von fünf Dimensionen.

Ohne an dieser Stelle auf die Einführung von Linienkoordinaten zurückzugreifen, erinnern wir an die beiden folgenden Sätze, welche die vollständige Basis der weiteren Untersuchungen bilden:

Irgend sechs Zahlen x_i $(i = 1 \ldots 6)$, welche der Gleichung:

$$p \equiv x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$$

genügen, können als homogene Koordinaten einer geraden Linie, betrachtet als Strahl oder Achse[25]), aufgefaßt werden, und zwar besteht zwischen den Elementen derjenigen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, welche durch die Gleichung $p = 0$ aus der allgemeinen fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit ausgeschieden wird, und den geraden Linien des Raumes eine umkehrbar eindeutige Beziehung.

Zwei gerade Linien x_i und y_i schneiden sich, wenn ihre Koordinaten die Relation:

$$p(x, y) \equiv x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_2 + x_6 y_3 = 0$$

erfüllen.

---

[24]) Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form. Inaugural-Dissertation. Bonn 1868. Wiederabgedruckt in den Mathem. Ann., Bd. XXIII, S. 539 ff.

[25]) Siehe Pluecker, l. c., S. 1.

Kapitel I.

Die Gleichung $p = 0$ der Gesamtheit der geraden Linien des Raumes betrachtet als Gleichung einer Fläche zweiten Grades im linearen Raume von fünf Dimensionen.[26])

§ 1.

Die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkte x_i einer beliebigen $(n-1)$-dimensionalen Fläche:

$$f(x_1 : x_2 : \ldots : x_n) = 0$$

eines linearen Raumes von n Dimensionen lautet bekanntlich:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0.$$

Mann kann nämlich die Gesamtheit der geraden Linien des Raumes, welche durch x_i hindurchgehen, als Verbindungsgerade des Punktes x_i mit den Punkten y_i einer beliebigen $(n-1)$-dimensionalen Ebene[27]):

$$\sum c_i y_i = 0$$

auffassen. Ein beliebiger Punkt einer solchen Verbindungsgeraden hat alsdann die Koordinaten $x_i + \lambda y_i$. Soll die Verbindungsgerade der Punkte x_i und y_i die Fläche $f = 0$ im Punkte x_i tangieren, so muß auch der Koeffizient von λ^1 in der Entwicklung von $f(x_i + \lambda y_i)$ nach Potenzen von λ verschwinden. Es ist aber:

---

[26]) Die Geometrie der Flächen zweiten Grades in einem linearen Raume von beliebig vielen Dimensionen ist insbesondere von Segre in der ersten der in der 6. Anmerkung zitierten Memoria studiert worden. (Vgl. auch Cayley, On the superlines of a quadric surface in fivedimensional space, Quarterly Journal, vol. XII, 1873.) — Die wenigen im folgenden abgeleiteten Sätze sind nach Form und Inhalt genau den Bedürfnissen der vorliegenden Arbeit angepaßt. Es sind infolgedessen die von Herrn Segre in ganz allgemeiner Form gegebenen Sätze über die beiden wohl unterschiedenen (ben distinti, pag. 36) Systeme von zweidimensionalen Ebenen, welche in der Fundamentalfläche $p = 0$ enthalten sind, hier nicht von neuem abgeleitet worden. Sie beweisen für die Liniengeometrie nichts, folgen vielmehr unmittelbar aus ihr, sobald der Zusammenhang zwischen der Liniengeometrie und der Geometrie der Fundamentalfläche hergestellt worden ist.

[27]) Die Einführung dieser Ebene, welche an dieser Stelle an sich überflüssig ist, geschieht zum besseren Verständnis späterer Ableitungen.

$$f(x_i + \lambda y_i) = f(x_i) + \lambda \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k + \cdots$$

Die Punkte y_i der willkürlich gewählten Ebene $\sum c_i y_i = 0$, welche mit x_i verbunden, $f = 0$ im Punkte x_i tangierende gerade Linien bestimmen, sind daher auf die Ebene:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

angewiesen. Diese Ebene geht aber nach Eulers Theorem über homogene Funktionen durch den Punkt x_i hindurch. Sie enthält daher sämtliche $f = 0$ im Punkte x_i tangierenden geraden Linien vollständig, d. h. sie ist die Tangentialebene der Fläche $f = 0$ im Punkte x_i.

Die die Gesamtheit der geraden Linien des Raumes repräsentierende Gleichung:

$$p \equiv x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0 \qquad (1)$$

kann daher als die Gleichung einer vierdimensionalen Fläche der zweiten Ordnung eines linearen Raumes von fünf Dimensionen betrachtet werden, welche auf ein Koordinaten-Hexagon oder Hexander bezogen ist, dessen Ecken[28]):

I, II, III, IV, V, VI

ihr angehören und dessen Seitenflächen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

sie bezüglich in den Punkten:

IV, V, VI, I, II, III

tangieren. Da die Diskriminante der Gleichung (1) von Null verschieden ist, so ist die Fläche $p = 0$, die wir im folgenden als Fundamentalfläche bezeichnen wollen, algebraisch gesprochen, die allgemeine Fläche der zweiten Ordnung. Sie hat daher, in Übereinstimmung damit, daß im Raume keine gerade Linie vor der anderen ausgezeichnet ist, keinen singulären Punkt. Aus diesem Grunde genügt es auch, um den Schnitt der Fundamentalfläche mit

---

[28]) Ihnen entsprechen in der Liniengeometrie die Kanten eines Tetraeders, wie aus den weiteren Ausführungen unmittelbar hervorgeht.

einer beliebigen Tangentialebene: $\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} y_i = 0$ zu untersuchen, etwa den Schnitt der Ebene $x_6 = 0$ zu betrachten. Die Ebene $x_6 = 0$ tangiert $p = 0$ im Punkte III. Ihr Schnitt ist daher eine in $x_6 = 0$ gelegene dreidimensionale Fläche der zweiten Ordnung:

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 = 0, \tag{2}$$

welche den Punkt III zum Doppelpunkte hat. Da die Diskriminante der Gleichung (2) verschwindet, ohne daß auch sämtliche ersten Unterdeterminanten gleich Null wären, so ist der Punkt III der einzige singuläre Punkt der Fläche (2). Die Gleichung (2) repräsentiert daher einen in der Fundamentalfläche und der Ebene $x_6 = 0$ gelegenen Kegel erster Spezies. Von jedem Punkte der Fundamentalfläche $p = 0$ gehen folglich ∞^2 ganz in ihr gelegene gerade Linien aus. Da $p = 0$ einerseits ∞^4 Punkte hat, andererseits auf jeder in ihr liegenden geraden Linie ∞^1 ihrer Punkte gelegen sind, so bildet die Gesamtheit der in $p = 0$ enthaltenen geraden Linien eine $(4 + 2 - 1) = 5$-fache Mannigfaltigkeit.

Ist A mit den Koordinaten a_i ein beliebiger Punkt der Fundamentalfläche $p = 0$, so lautet die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte:

$$p(a, x) \equiv a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3 + a_1 x_4 + a_2 x_5 + a_3 x_6 = 0. \tag{3}$$

Die Koeffizienten der Gleichungen der Tangentialebenen von $p = 0$ erfüllen also die Relation (1).

Es stellt aber auch umgekehrt eine lineare Gleichung:

$$p(b, x) = 0,$$

deren Koeffizienten b_i der Relation (1) genügen, eine die Fundamentalfläche tangierende Ebene dar und zwar sind die Koordinaten des Berührungspunktes[29]) b_i.

In einem beliebigen Ebenenbüschel:

$$p(a, x) + \lambda p(b, x) = 0 \tag{4}$$

befinden sich daher den Wurzeln der für λ quadratischen Gleichung:

---

[29]) Diese für die analytische Behandlung der Liniengeometrie wichtige Eigenschaft geht verloren, wenn man eine andere Gleichungsform der Fundamentalfläche zu Grunde legt, außer der im letzten Paragraphen dieses Kapitels besprochenen.

$$(a_4+\lambda b_4)(a_1+\lambda b_1)+(a_5+\lambda b_5)(a_2+\lambda b_2)+(a_6+\lambda b_6)(a_3+\lambda b_3)=0$$

entsprechend, zwei $p = 0$ tangierende Ebenen, d. h. die Fundamentalfläche ist auch von der zweiten Klasse.

Befinden sich in einem Ebenenbüschel mehr als zwei die Fundamentalfläche tangierende Ebenen, so müssen daher sämtliche Ebenen des Büschels Tangentialebenen sein. Zwischen den Koeffizienten der Gleichungen der beiden Grundebenen des Büschels (4) müssen alsdann die folgenden drei Relationen bestehen:

$$p(a) = 0, \quad p(b) = 0, \quad p(a,b) = 0. \tag{5}$$

Die Koordinaten der Berührungspunkte der Ebenen des Büschels (4) mit der Fundamentalfläche sind:

$$a_i + \lambda b_i.$$

Während sich die Ebene um die Achse des Büschels dreht, beschreibt daher ihr Berührungspunkt mit $p = 0$ eine in $p = 0$ gelegene gerade Linie, und zwar die Verbindungsgerade der Berührungspunkte A und B der Grundebenen des Büschels (4). Punktreihe und Ebenenbüschel sind projektiv aufeinander bezogen.

Da eine Tangentialebene in Verbindung mit einer beliebigen durch ihren Berührungspunkt hindurchgehenden Ebene aus $p = 0$ eine in dem Schnitt der beiden Ebenen, d. h. einem linearen Raume von drei Dimensionen, gelegene Fläche der zweiten Ordnung ausschneidet, welche den Berührungspunkt der Tangentialebene zum Doppelpunkt hat, so besteht der Schnitt der Achse des Büschels (4) aus einer gewöhnlichen Fläche der zweiten Ordnung, welche die Punkte der geraden Linie AB zu Doppelpunkten hat. Der Schnitt von $p = 0$, $p(a, x) = 0$, $p(b, x) = 0$ und damit der Schnitt der Fundamentalfläche mit zwei beliebigen Tangentialebenen, deren Berührungspunkte auf einer in $p = 0$ gelegenen geraden Linie liegen, zerfällt daher in zwei zweidimensionale Ebenen, welche die besagte gerade Linie, die Verbindungsgerade ihrer Berührungspunkte miteinander gemein haben.

Um diesen Satz auch analytisch nachzuweisen, denke man sich die Ebenen $p(a, x) = 0$ und $p(b, x) = 0$ bzw. ihre Gleichungen, zwischen deren Koeffizienten die Relationen (5) bestehen, durch eine lineare Transformation, welche die Form $p = 0$ in sich selbst überführt, auf die Formen:

$$x_5 = 0 \quad \text{und} \quad x_6 = 0$$

gebracht. Alsdann berühren die beiden Ebenen die Fundamentalfläche bezüglich in den Punkten II und III, während ihr Schnitt mit $p = 0$ aus dem in ihrem Schnitt gelegenen Ebenenpaar:

$$x_1 x_4 = 0$$

besteht, welche in der Tat die Verbindungsgerade der Punkte II und III miteinander gemein haben.

Da einerseits in $p = 0$ ∞^5 gerade Linien gelegen sind, andererseits in jeder zweidimensionalen Ebene ∞^2 gerade Linien enthalten sind, so bilden die in der Fundamentalfläche gelegenen Ebenen eine $(5 - 2) = 3$-fache Mannigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit ist jedoch nicht irreduzibel. Sie zerfällt vielmehr, wie wir sogleich erkennen werden, in zwei wohl unterschiedene Systeme, zwischen deren Elementen, ebenso wie bei den beiden Systemen von Erzeugenden einer gewöhnlichen Fläche zweiten Grades, ein kontinuierlicher Übergang nicht besteht.

§ 2.

Die Gleichung $p(a, x) = 0$, deren Koeffizienten die Relation (1) befriedigen, repräsentiert die Gesamtheit der geraden Linien x_i, welche die gerade Linie a treffen, d. h. einen speziellen linearen Komplex mit der Leitlinie a.

Zwei spezielle lineare Komplexe:

$$p(a, x) = 0, \quad p(b, x) = 0,$$

deren Leitlinien einander treffen, für welche also die Koeffizienten ihrer Gleichungen die drei Bedingungen (5) erfüllen, haben die Strahlen des durch ihre Leitlinien bestimmten ebenen Feldes und Bündels miteinander gemein, d. h. die Erzeugenden einer zerfallenen linearen Kongruenz. Da irgend zwei der speziellen linearen Komplexe des Büschels:

$$p(a, x) + \lambda p(b, x) = 0$$

eine und dieselbe zerfallene lineare Kongruenz miteinander gemein haben, so sind ihre Leitlinien mit den Koordinaten $a_i + \lambda b_i$ die Erzeugenden eines ebenen Strahlenbüschels[30]). Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

---

[30]) Daß man diesen Satz auch, ohne die liniengeometrische Darstellung der geraden Linie durch einen speziellen linearenKomplex zu Hilfe zu nehmen,

1. *Den Tangentialebenen der Fundamentalfläche $p = 0$ entsprechen in der Liniengeometrie die speziellen linearen Komplexe, ihren Berührungspunkten die Leitlinien derselben.* Den ∞^4 Punkten der Fundamentalfläche gemäß gibt es ∞^4 spezielle lineare Komplexe in Übereinstimmung damit, daß ein solches Gebilde als liniengeometrische Darstellung einer geraden Linie des Raumes betrachtet werden kann.

2. *Den Punkten der ∞^5 in der Fundamentalfläche gelegenen geraden Linien entsprechen die Erzeugenden der Strahlenbüschel in der Liniengeometrie.*

3. *Zwei Strahlen a und b treffen einander, wenn die ihnen entsprechenden Punkte A und B auf einer und derselben in der Fundamentalfläche gelegenen geraden Linie liegen.*

4. *Der dreifachen Mannigfaltigkeit der zweidimensionalen Ebenen der Fundamentalfläche entsprechen die ebenen Felder und Bündel des Strahlenraumes und zwar so, daß den Punkten zweier Ebenen, welche eine gerade Linie miteinander gemein haben, die Erzeugenden einer zerfallenen linearen Kongruenz zugeordnet sind.*

§ 3.

Eine zu $p=0$ hinzutretende algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade $f=0$ repräsentiert einen algebraischen Linienkomplex des n^{ten} Grades[31]). Denn da die Strahlenbüschel des Raumes den geraden Linien der Fundamentalfläche entsprechen und eine gerade Linie eine Fläche der n^{ten} Ordnung in n Punkten trifft, so hat ein beliebiges Strahlenbüschel mit dem Komplex $f = 0$ n Strahlen gemein.

Eine zerfallene lineare Kongruenz hat mit einem Komplex des n^{ten} Grades die Erzeugenden eines Kegels der n^{ten} Ordnung und die Tangenten einer Kurve der n^{ten} Klasse gemein. Die Koordinaten der

---

nach rein liniengeometrischen Prinzipien beweisen kann, ist von Herrn Voß (l. c., S. 62) gezeigt worden.

31) Da ein Linienkomplex durch eine Gleichung in Linienkoordinaten oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch vier Gleichungen, welche drei unabhängige Parameter enthalten, definirt wird, so folgt, wegen der Eindeutigkeit der Beziehung der Elemente zueinander, umgekehrt, daß jede in der Fundamentalfläche enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen ihr vollständiger Schnitt mit einer anderen vierdimensionalen Fläche ist, ein Satz, welchen Herr Klein (Über einen liniengeometrischen Satz, Göttinger Nachrichten 1872) in allgemeinerer Form bewiesen hat.

gemeinschaftlichen geraden Linien haben den folgenden vier Gleichungen zu genügen:

$$p = 0$$
$$f = 0$$
$$p(a, x) = 0$$
$$p(b, x) = 0,$$

in denen die Koeffizienten der beiden letzten Gleichungen die Bedingungen (5) erfüllen. Die in der Liniengeometrie herrschende Dualität[32]), welche darin begründet ist, daß man die Linienkoordinaten x_i als Strahlen- oder Achsenkoordinaten deuten kann, wird daher in der Fundamentalfläche $p = 0$ dadurch zum Ausdruck gebracht, daß ihr Schnitt mit den beiden Ebenen $p(a, x) = 0$ und $p(b, x) = 0$ in zwei zweidimensionale Ebenen von der Beschaffenheit zerfällt, daß den Punkten der einen die Strahlen eines Bündels entsprechen, während den Punkten der anderen die Strahlen eines ebenen Feldes zugeordnet sind. Die Dualität wird daher durchbrochen, wenn die Flächen $p = 0$ und $f = 0$ eine zweidimensionale Ebene miteinander gemein haben[33]). Es stellt alsdann eine und dieselbe Gleichung, je nachdem ob man sie als Gleichung in Strahlen- oder Achsenkoordinaten interpretiert, zwei einander dualistisch entsprechende Linienkomplexe dar. Besteht insbesondere der Schnitt der Fläche $f = 0$ mit der Fundamentalfläche aus einem System von ∞^1 zweidimensionalen Ebenen, so stellt die Gleichung $f = 0$, je nachdem ob man sie als Gleichung in Strahlen- oder Achsenkoordinaten betrachtet, eine Kurve der n^{ten} Ordnung, beschrieben von Bündeln, oder eine Developpable der n^{ten} Klasse, umhüllt von ebenen Feldern, vor.

§ 4.

Die Fundamentalfläche erschien in ihrer ursprünglichen Gleichungsform $p = 0$ auf ein Tangential-Hexaeder bezogen. Denken wir sie nach Analogie der gewöhnlichen Flächen zweiten Grades auf ein Polar-Hexagon bezogen, so kann ihre Gleichung in der folgenden Form geschrieben werden:

$$p \equiv \sum_1^6{}_i x_i^2 = 0\,^{34}).$$

---

[32]) Siehe Anm. 13.

[33]) Allgemein, wenn die Lagebeziehung der Fläche $f = 0$ zu den beiden Ebenensystemen der Fundamentalfläche eine unsymmetrische ist.

[34]) Siehe Anm. 24.

Alsdann sind Strahlen- und Achsenkoordinaten, obwohl ursprünglich durch verschiedene analytische Formeln eingeführt, nicht mehr von einander unterscheidbar[35]). Die Gleichung der Fläche $f = 0$ nimmt bei der hierzu erforderlichen Transformation eine andere Form an, welche im allgemeinen wiederum allgemein sein wird.

Die Gleichung der Tangentialebene der Fundamentalfläche in einem beliebigen ihrer Punkte a_i lautet alsdann:

$$\sum a_i x_i = 0.$$

Die Koeffizienten der Gleichung eines speziellen linearen Komplexes mit der Leitlinie a_i haben daher der Relation:

$$\sum a_i^2 = 0$$

zu genügen. Die Bedingung des Schneidens zweier Strahlen a und b ist dadurch charakterisiert, daß die ihnen entsprechenden Punkte mit den Koordinaten a_i und b_i auf einer und derselben in der Fundamentalfläche enthaltenen geraden Linie liegen. Zwei Strahlen a und b schneiden einander daher unter Zugrundelegung der neuen Gleichungsform der Fundamentalfläche, wenn ihre Koordinaten der Relation:

$$\sum a_i b_i = 0$$

genügen.

---

[35]) Außerdem lassen sich die im folgenden notwendigen Formeln besser schreiben bzw. abkürzen. Die ursprüngliche und die neue Gleichungsform der Fundamentalfläche haben eine für die analytische Darstellung wesentliche Eigenschaft mit einander gemein, nämlich die, mit der Form der Fläche in Ebenenkoordinaten $u_i = \varrho \frac{\partial f}{\partial x_i}$ identisch zu sein. (Siehe Anm. 29.)

Kapitel II.

Über den konischen Polar- bzw. Tangentialkomplex eines Komplexstrahles bzw. die vier die Kurve $f \equiv (f = 0, p = 0)$ in einem Punkte oskulierenden geraden Linien der Fundamentalfläche, betrachtet als Schnittgerade zweier Kegel Φ und Ψ der zweiten Ordnung.

§ 1.

Im allgemeinen.

Der Definition eines allgemeinen algebraischen Linienkomplexes des n^{ten} Grades zufolge ist ein beliebiger seiner Komplexkegel der allgemeine Kegel der n^{ten} Ordnung[36]) und eine beliebige seiner Komplexkurven die allgemeine Kurve der n^{ten} Klasse. Singularitäten der ersten Gruppe, d. h. solche, welche sich auf die Komplexkurven, betrachtet als Örter von Punkten, und die Komplexkegel, betrachtet als Enveloppen von Ebenen beziehen, werden daher in dreifacher Mannigfaltigkeit vorhanden sein, während Singularitäten der zweiten Gruppe, d. h. solche, welche die Komplexkurven, betrachtet als Enveloppen von geraden Linien, und die Komplexkegel, betrachtet als Örter von Punkten, betreffen, nur in zweifach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden sein können.

Um die Singularitäten beider Gruppen eines Linienkomplexes zu untersuchen, hat man die Verteilung der Komplexstrahlen in der Nähe eines seiner Strahlen x_i zu ermitteln. Hierbei braucht man lediglich auf die Natur des zweiten Polarkomplexes:

$$\sum_{1}^{6}{}_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0 \text{ [37])} \tag{1}$$

zu achten, so wie man in der Theorie der Flächen die Gestalt einer Fläche in der Nähe eines Knotenpunktes durch Betrachtung des

---

[36]) Einen liniengeometrischen Beweis dieses Satzes kann man den Ausführungen des dritten Paragraphen des vorigen Kapitels entnehmen. Wir werden an späterer Stelle ausführlicher darauf zurückkommen.

[37]) Voß, l. c., S. 63 ff., ferner S. 143 und: Über eine Fundamentalaufgabe der Pluecker'schen Geometrie. Göttinger Nachrichten 1875, S. 117. Vgl. auch § 3 dieses Kapitels der vorliegenden Arbeit.

oskulierenden Kegels zweiten Grades bestimmt. Diese Methode der Untersuchung gewinnt nun vermöge oder eigentlich trotz der Betrachtung der Liniengeometrie als der Geometrie auf einer vierdimensionalen Fläche zweiten Grades im Raume von fünf Dimensionen nicht unbeträchtlich an Anschaulichkeit. Da nämlich die Strahlen eines Linienkomplexes den Punkten einer dreidimensionalen Kurve entsprechen, so hat man nur nötig, sich in die Tangente des betreffenden Punktes der Kurve versetzt zu denken, in welcher ja, als in einem dreidimensionalen linearen Raume alles anschaulich ist. Dabei ist zu beachten, daß die Theorie der Komplexe durchaus analog ist der Theorie der gewöhnlichen Kurven, welche auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Die einzelne Fläche $f = 0$, welche aus der Fundamentalfläche $p = 0$ die dem Linienkomplex entsprechende dreidimensionale Kurve ausschneidet, kommt bei der Diskussion dieser Kurve garnicht in Betracht, sondern nur die durch sie und $p = 0$ bestimmte Flächenschar:

$$f + qp = 0. \tag{2}$$

In der Gleichung (2) dieser Flächenschar bedeutet q eine beliebige homogene Funktion der x_i vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Rolle eines variablen Parameters beziehungsweise einer Konstanten spielt, da für die Diskussion der Grundkurve der Schar (2) lediglich die Richtung (in projektivem Sinne) von Belang ist, in welcher die Individuen der Schar die Fundamentalfläche durchsetzen.

Die Gleichung der Tangentialebene einer Fläche der Schar (2) in einem ihrer Punkte x_i lautet:

$$\sum \frac{\partial (f + qp)}{\partial x_i} y_i = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p \frac{\partial q}{\partial x_i} + q \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) y_i = 0$$

und mithin wegen $p \equiv \sum x_i^2 = 0$ für einen beliebigen festen Punkt x_i:

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i \right) y_i = 0, \tag{3}$$

d. h. für einen beliebigen Punkt der Grundkurve bestimmt die Gesamtheit der Individuen der Schar (2) ein (mehrfach überdecktes) Büschel von Tangentialebenen. Die Achse eines solchen Büschels (3) ist die dreidimensionale Tangente der Kurve f im Punkte x_i. $f - (p = 0, f = 0)$ besitzt daher im allgemeinen in jedem ihrer Punkte eine und nur eine Tangente T von drei Dimensionen.

Um die Umgebung eines Punktes P der Kurve f zu untersuchen, betrachten wir den Schnitt der beiden Flächen $p = 0$ und $f = 0$ mit der soeben definierten dreidimensionalen Tangente T von f im Punkte P. Diese kann als Schnitt der $p = 0$ und $f = 0$ im Punkte P tangierenden Ebenen:

$$\sum x_i y_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

definiert werden. Ihr Schnitt mit der Fundamentalfläche ist daher ein in dem dreidimensionalen Raume T gelegener Kegel der zweiten Ordnung, welcher den Punkt P zum Mittelpunkte hat. Er möge Φ genannt werden. Dem Punkte P sind ∞^2 Punkte der Kurve f unendlich benachbart. Die ihnen entsprechenden geraden Linien liegen im allgemeinen windschief zu der dem Punkte P entsprechenden geraden Linie p. Sie treffen p dann und nur dann, wenn die betreffenden Punkte mit P auf einer und derselben in der Fundamentalfläche gelegenen geraden Linie liegen. Die Gerade p wird daher nur von denjenigen ∞^1 geraden Linien geschnitten, welche Punkten des Kegels Φ entsprechen, die der Spitze P desselben unendlich benachbart sind. Den Erzeugenden des Kegels Φ, d. h. der Gesamtheit der in $p = 0$ gelegenen $f = 0$ im Punkte P tangierenden geraden Linien entsprechen in der Liniengeometrie die ∞^1 Strahlenbüschel, welche der spezielle lineare Komplex $\sum x_i y_i = 0$ mit der Leitlinie p mit den Koordinaten x_i mit dem allgemeinen die Linie p enthaltenden linearen Komplexe $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$ gemein hat. Den Punkten des Kegels Φ entsprechen daher die Erzeugenden einer speziellen linearen Kongruenz, welche aus ∞^1 den Strahl p enthaltenden Büscheln besteht, deren Mittelpunkte und Ebenen projektiv [38]) aufeinander bezogen sind. Da die Strahlenbüschel der Kongruenz den Erzeugenden des Kegels P entsprechen, so folgt, daß die Reihe der Berührungspunkte einer Komplexkurve mit einem beliebigen Komplexstrahl dem Büschel ihrer Ebenen projektiv ist.

Der Schnitt der Tangente T im Punkte P von f mit der Fläche $f = 0$ besteht aus einer ebenfalls in dem dreidimensionalen linearen Raume T gelegenen Fläche der n^{ten} Ordnung, welche den Punkt P zum Doppelpunkte hat. Der diese Fläche im Punkte P

[38]) Diese Projektivität kann umgekehrt, wie zuerst von Herrn Pasch bemerkt worden ist (Habilitationsschrift, Gießen 1870), zur geometrischen Definition der speziellen linearen Kongruenz benutzt werden.

oskulierende Kegel zweiten Grades — er möge Ψ genannt werden — schneidet aus dem Kegel Φ vier gerade Linen aus. Ihnen entsprechen vier Strahlenbüschel, welche mit dem Komplex f je n Strahlen gemein haben, von denen drei in dem dem Punkte P entsprechenden Strahle p vereinigt sind. Das gibt den Satz:

Ein beliebiger Komplexstrahl ist für vier Komplexkurven Spitzentangente und für vier Komplexkegel Wendekante. Die Wendeebenen sind identisch mit den Ebenen der Komplexkurven, deren Rückkehrpunkte die Mittelpunkte der vier Kegel sind. Das Doppelverhältnis der vier Wendeebenen ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Rückkehrpunkte[39]).

§ 2.

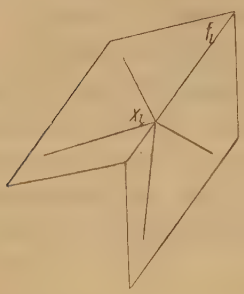
Der Kegel Φ zerfällt: die Kongruenz der Doppeltangenten von Komplexkurven bzw. Doppelkanten von Komplexkegeln.

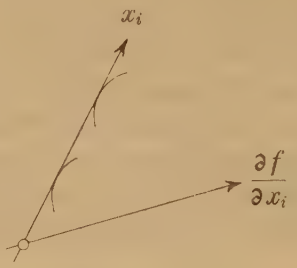
Der soeben abgeleitete Satz behält auch dann noch Gültigkeit, wenn etwa der oskulierende Kegel Ψ zerfällt. Hingegen erleidet er eine wichtige Modifikation, wenn der Kegel Φ der in der Fundamentalfläche gelegenen $f = 0$ im Punkte P tangierenden geraden Linien in ein Ebenenpaar degeneriert. Denn den Punkten der beiden Ebenen Φ entsprechen alsdann die Strahlen einer zerfallenen linearen Kongruenz, d. h. eines ebenen Feldes und eines Bündels, welche das der Schnittgeraden der beiden Ebenen entsprechende Strahlenbüschel miteinander gemein haben. Jede der Ebenen Φ schneidet den oskulierenden Kegel Ψ in zwei geraden Linien. Die zerfallene lineare Kongruenz hat daher mit dem gegebenen Komplexe die Tangenten einer Kurve und die Erzeugenden eines Kegels gemein, welche die

---

[39]) Vgl. Voß, l. c., S. 63. Für Komplexe zweiten Grades besagt der Satz natürlich, daß das Doppelverhältnis der vier auf einem Komplexstrahl gelegenen singulären Punkte gleich demjenigen der vier durch ihn hindurchgehenden singulären Ebenen ist. Hieraus folgt weiter, da nach der Theorie der konfokalen Komplexe (siehe Kapitel IV der vorliegenden Arbeit) eine beliebige Raumgerade mindestens einem (im allgemeinen vier) Komplexen der konfokalen Reihe angehört, daß das Doppelverhältnis der vier auf einer beliebigen geraden Linie des Raumes gelegenen singulären Punkte eines Komplexes zweiten Grades dem Doppelverhältnis der vier durch sie hindurchgehenden singulären Ebenen gleich ist, ein Satz, welcher zuerst von Herrn Klein (Über die Pluecker'sche Komplexfläche, Mathem. Ann., Bd. VII, S. 208) bewiesen worden ist. — Vgl. hierzu ferner: Voß, l. c., S. 66 und Segre, l. c., S. 118.

der Spitze des Kegels Ψ entsprechende gerade Linie zur Doppeltangente bzw. Doppelkante haben:





(und dual)

Ein solcher Komplexstrahl heißt nach Pluecker[40]) *singuläre Linie.* Jede singuläre Linie ist demnach *gleichzeitig für eine Komplexkurve Doppeltangente und für einen Komplexkegel Doppelkante.* Die Ebene der Kurve wird die der singulären Linie zugeordnete singuläre Ebene, der Mittelpunkt des Kegels der ihr zugeordnete singuläre Punkt genannt. Da das Ebenenpaar Φ sämtliche in $p = 0$ gelegenen $f = 0$ im Punkte P tangierenden geraden Linien enthält, so berühren sämtliche Komplexkurven, welche eine singuläre Linie p zur Tangente haben, diese in dem ihr zugeordneten singulären Punkte, während sämtliche Komplexkegel, welche die singuläre Linie zur Erzeugenden haben, die ihr zugeordnete singuläre Ebene längs der singulären Linie berühren.

Der Kegel Φ ist der Schnitt der Fundamentalfläche $p = 0$ mit den beiden $p = 0$ und $f = 0$ im Punkte P berührenden Ebenen:

$$\sum x_i y_i = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0.$$

Es ist daher eine und nur eine Bedingung erforderlich, wenn Φ in ein Ebenenpaar degenerieren soll: die im Punkte x_i an $f = 0$ gelegte Tangentialebene muß gleichzeitig die Fundamentalfläche (in einem anderen Punkte) tangieren. Die Koeffizienten der Gleichung: $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$ haben demnach der Bedingungsgleichung:

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

[40]) L. c., S. 292 ff.

zu genügen. Alsdann sind die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die Koordinaten des Berührungspunktes von $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$ mit $p = 0$, d. h. der Punkt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bestimmt mit x_i die Schnittgerade des Ebenenpaares Φ. Die dem Punkte mit den Koordinaten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ entsprechende gerade Linie schneidet daher auf der singulären Linie x_i den ihr zugeordneten singulären Punkt aus und bestimmt mit ihr die ihr zugeordnete singuläre Ebene. Die Linie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bzw. wegen:

$$\frac{\partial (f + qp)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i$$

eine beliebige Linie des Büschels $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i$ heißt die zugeordnete Linie der singulären Linie x_i[41]).

Da die Koordinaten x_i der singulären Linien eines Komplexes der Gleichung (4) zu genügen haben, so wird die Kongruenz der singulären Linien durch einen Komplex vom $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grade aus dem gegebenen Komplex ausgeschnitten. Sie ist daher von der Ordnung und Klasse:

$$\tfrac{1}{2}\, 2\, n\, (n-1)$$ [42]).

§ 3.

Besondere Lagebeziehungen der Kegel Φ und Ψ gegeneinander.

1. Die vier geraden Linien, in welchen der Kegel Ψ der $p = 0$ im Punkte x_i tangierenden und $f = 0$ in demselben Punkte oskulierenden geraden Linien den Kegel Φ der in der Fundamentalfläche gelegenen, $f = 0$ im Punkte x_i tangierenden geraden Linien schneidet, sind die Verbindungsgeraden des Punktes x_i mit den vier Punkten y_i, welche die fünf Gleichungen[43]):

[41]) Vgl. Voß, l. c., S. 78.
[42]) Pluecker, l. c., S. 296.
[43]) Vgl. Kap. I, § 1 vorliegender Arbeit.

$$\begin{aligned} \sum c_i y_i &= 0 \\ \sum x_i y_i &= 0 \\ \sum y_i^2 &= 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

bestimmen. Die Beantwortung der Frage nach der gegenseitigen Lage der Kegel Φ und Ψ ergibt sich aus folgendem von Herrn Voß[44]) gegebenen Theoreme, welches als eine Verallgemeinerung bekannter Untersuchungen über das Schnittpunktsystem von zwei Kegelschnitten zu betrachten ist:

Damit zwei quadratische Gleichungen mit n homogenen Variablen:

$$A \equiv \sum a_{ik} y_i y_k = 0, \qquad B \equiv \sum b_{ik} y_i y_k = 0$$

und die $n - 3$ linearen:

$$\sum c_{1,i} y_i = 0, \quad \sum c_{2,i} y_i = 0, \ldots \quad \sum c_{n-3,i} y_i = 0$$

zwei oder drei gleiche Wurzeln y_i besitzen, muß die kubische Gleichung in μ, welche entsteht, wenn man die Determinante der Funktion:

$$A - \mu B$$

mit den Koeffizienten der $n - 3$ linearen Gleichungen rändert, zwei oder drei gleiche Wurzeln haben.

Wendet man dieses Theorem auf die Gleichungen (1) an, so ergibt sich nach Absonderung des Faktors $(\sum c_i x_i)^2$ vermöge $\sum x_i^2 = 0$ und $f = 0$ als Gleichung für μ die gleich Null gesetzte Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \mu f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & x_1 \\ f_{21} & f_{22} - \mu f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & x_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} - \mu f_{34} & f_{35} & f_{36} & x_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} - \mu f_{45} & f_{46} & x_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} - \mu f_{56} & x_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} - \mu x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \quad 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

[44]) l. c., S. 70.

welche, vermittels eines Kunstgriffes[45]) nach Potenzen von μ entwickelt, die folgende Gestalt annimmt:

$$\mu^3 a_0 + \mu^2 a_1 + \mu a_2 + a_3 = 0, \tag{3}$$

wo:

$$a_0 = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \equiv F$$

$$a_1 = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + a_1 F$$

$$a_2 = \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_1 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + a_2 F$$

$$a_3 = \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_k} + a_1 \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_2 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + a_3 F$$

ist, während a_1, a_2 und a_3 bezüglich Funktionen der x_i vom Grade $n-2$, $2(n-2)$, $3(n-2)$ sind. Die Kegel Φ und Ψ haben daher zwei unendlich benachbarte Erzeugende miteinander gemein, wenn die Diskriminante der Gleichung (3):

$$\begin{vmatrix} 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Da sie eine homogene Funktion der x_i vom Grade $14n - 20$ ist, so ist *die Kongruenz der Komplexgeraden, für welche die Spitzen zweier der vier Kegel, für welche sie Wendekanten sind, und die zugehörigen Ebenen zusammenfallen, der vollständige Schnitt des gegebenen Komplexes mit einem Komplex vom Grade $14n - 20$ und somit von der Ordnung und Klasse:*

$$\tfrac{1}{2}\, 2n(14n - 20)\ ^{46}).$$

Verschwinden auch die Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 3a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{matrix} \right\|,$$

---

[45]) Siehe Voß, l. c., p. 67. — Wenn der Komplex bzw. seine Gleichung sich in der Clebsch'schen Normalform (Über die Pluecker'schen Komplexe. Mathem. Ann., Bd. II, S. 1 ff.) befindet, verschwindet $a_1 \equiv -\Sigma f_{ii}$.

[46]) Voß, l. c., p. 69.

so haben die Kegel Φ und Ψ drei unendlich benachbarte Erzeugende miteinander gemein. Da sich die hierin enthaltenen Bedingungen durch die beiden Gleichungen:

$$3\,a_0\,a_2 - a_1^2 = 0$$
$$9\,a_0\,a_3 - a_1\,a_2 = 0$$

ersetzen lassen, aus denen die Auflösungen der Gleichungen:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0$$

als der Aufgabe fremd auszuscheiden sind, so ist *die Linienfläche der Komplexgeraden, für welche die Spitzen dreier der vier Kegel, für welche sie Wendekanten sind, zusammenfallen, vom Grade:*

$$2\,n\,[(6\,n - 8)\,(7\,n - 10) - (2\,n - 2)\,(3\,n - 4)]$$
$$= 12\,n\,(2\,n - 3)\,(3\,n - 4)\ ^{47}).$$

2. Ist $a_0 \equiv F = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$, so zerfällt der Kegel Φ in zwei einander in der Verbindungsgeraden der Punkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schneidende Ebenen, d. h. die der Spitze des Kegels Ψ entsprechende Linie x_i ist singuläre Linie des Komplexes. Die Diskriminante der Gleichung (3) hat alsdann die Form:

$$a_1^2\,(4\,a_1\,a_3 - a_2^2) = 0$$

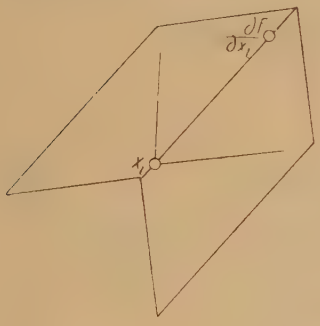
zerfällt also im wesentlichen in zwei Faktoren, welche den beiden möglichen Fällen entsprechen, daß der Kegel Ψ eine der beiden Ebenen Φ berührt, oder durch ihre Schnittgerade hindurchgeht. Ist $a_1 \equiv \Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0$, so oskuliert die Verbindungsgerade der Punkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ wegen:

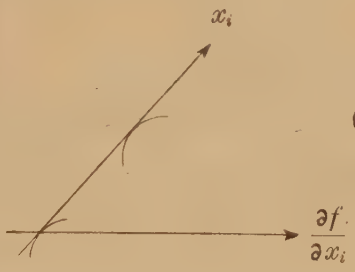
$$f\left(x_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = f + \lambda F + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} + \cdots$$

---

[47]) Voß, l. c., S. 70. — Für Komplexe zweiten Grades besteht diese Linienfläche aus den Tangenten der dem Komplex zugeordneten Haupttangentenkurve der singulären Fläche (vgl. Kap. III, § 8).

die Fläche $f = 0$ im Punkte x_i, d. h. der Kegel Ψ geht durch die Schnittgerade der Ebenen Φ hindurch. Der eine der beiden Berührungspunkte der singulären Linie x_i mit der Komplexkurve, für welche sie Doppeltangente ist, fällt daher mit dem zugehörigen singulären Punkte zusammen. Und dual koinzidiert gleichzeitig die eine der beiden Ebenen, welche den vom singulären Punkte ausgehenden Kegel längs der singulären Linie tangieren, mit der zugehörigen singulären Ebene:



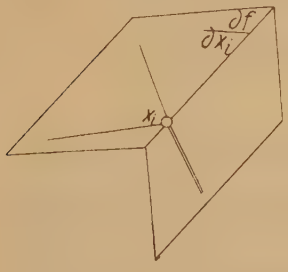


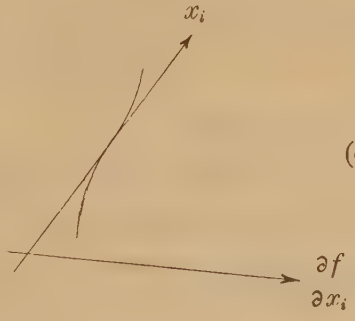
(und dual)

Ist hingegen:

$$4\,a_1\,a_3 - a_2^2 = 0,$$

so berührt der oskulierende Kegel Ψ die eine der beiden Ebenen Φ. Die der Spitze des Kegels Ψ entsprechende gerade Linie ist alsdann entweder Wendetangente einer Komplexkurve oder Rückkehrkante eines Komplexkegels:





(oder dual)

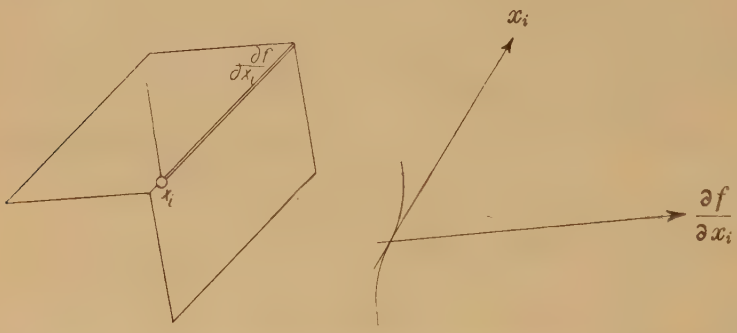
Da die Invariante:

$$4\,a_1\,a_3 - a_2^2$$

eine homogene Funktion der x_i vom Grade $8n - 12$ ist, so ist die *Linienfläche, deren Erzeugende Wendetangenten von Komplexkurven oder Rückkehrkanten von Komplexkegeln sind, vom Grade:*

$$16\,n\,(n-1)\,(2\,n-3)\,^{48}).$$

Verschwindet mit a_0 und a_1 auch a_2, so haben die Kegel Φ und Ψ den drei gleichen Wurzeln der Gleichung (3) zufolge drei unendlich nahe Erzeugende miteinander gemein, d. h. der oskulierende Kegel Ψ berührt eine der beiden Ebenen Φ längs ihrer Schnittgeraden:



(oder dual)

In diesem Falle rückt daher der Wendepunkt der betreffenden Komplexkurve in den singulären Punkt oder es fällt die Rückkehrtangentialebene des von dem singulären Punkte ausgehenden Kegels mit der singulären Ebene zusammen. Den Auflösungen der Gleichungen:

$$\Sigma\, x_i^2 = 0, \quad f = 0, \quad \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = F = 0, \quad \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

zufolge gibt es demnach:

$$\tfrac{1}{2}\,8\,n\,(n-1)\,(3\,n-4)\,(2\,n-3)\,^{49})$$

Komplexkurven, deren Wendepunkte mit den zugehörigen singulären Punkten koinzidieren und dual ebensoviele Komplexkegel, deren Rückkehrtangentialebene mit der singulären Ebene zusammenfällt.

[48]) Voß, l. c., S. 144.
[49]) Voß, l. c., S. 146.

Eine weitere Spezialisierung[50]) der gegenseitigen Lage der Kegel Φ und Ψ kann im allgemeinen nicht eintreten. Hieraus folgt insbesondere, daß keine singuläre Linie eines allgemeinen Komplexes zweiten Grades gleichzeitig 4-punktig und 4-ebenig berührende Tangente der singulären Fläche sein kann, worauf wir an späterer Stelle[51]) zurückkommen werden.

Kapitel III.

Die singuläre Fläche[52]) des Komplexes.

§ 1.

Die singulären Ebenen umhüllen die von den singulären Punkten gebildete Fläche.

Von den acht einander paarweise reziproken kovarianten Flächen eines Komplexes betrachten wir zunächst die beiden mit den Singularitäten der zweiten Gruppe verknüpften Flächen, d. h. diejenigen, welche von den singulären Punkten gebildet bzw. von den singulären Ebenen umhüllt werden. Die beiden Flächen sind, wie zuerst Herr Pasch[53]) auf synthetischem Wege bewiesen hat, identisch. Einen einfachen analytischen Beweis hat Herr Voß[54]) gegeben. Wir fügen den beiden Beweisen noch einen dritten, mit Hilfe der mehrdimensionalen Geometrie geführten Beweis hinzu, da wir die hierzu erforderlichen Betrachtungen an späterer Stelle[55]) doch anstellen müßten[56]).

Ein beliebiger Punkt P_1 der Kurve f $(p = 0,\ f = 0)$ bestimmt eine dreidimensionale Tangente, den Schnitt der beiden $p = 0$

[50]) Siehe Kap. VII vorliegender Arbeit.

[51]) Kap. VI.

[52]) Diese fast allgemein angenommene kürzere Benennung der Singularitätenfläche (F. Klein, Göttinger Nachrichten 1869, S. 267), deren Begriff für Komplexe beliebigen Grades zuerst von Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift gegeben wurde, rührt von Herrn Voß her (Göttinger Nachrichten 1873, Seite 546).

[53]) Habilitationsschrift (siehe Anm. 3 der vorliegenden Arbeit).

[54]) L. c., S. 79. [55]) Kap. VIII.

[56]) Vielleicht ist der Beweis auch deshalb nicht uninteressant, weil in ihn der auf jede Weise unvermeidliche Grenzprozeß ganz anders eingeht, als in den von Herrn Voß gegebenen analytischen Beweis.

und $f = 0$ im Punkte P_1 berührenden Ebenen. Bezeichnet man die Tangenten irgend zweier unendlich naher Punkte P_1 und P_2 von f als konsekutive Tangenten, so gilt in vollkommener Analogie zur Theorie der gewöhnlichen Raumkurven der Satz, nach welchem zwei konsekutive $(n-2)$-dimensionale Tangenten durch eine $(n-1)$-dimensionale Ebene verbunden werden können. Sind nämlich x_i die Koordinaten des Punktes P_1, $x_i + h_i$ die Koordinaten des Punktes P_2, so lauten die Gleichungen der beiden konsekutiven Tangenten T_1 und T_2 bezüglich:

$$\left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} y_i = 0,\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0\right);\quad \left(\sum \frac{\partial p'}{\partial x_i} y_i = 0,\ \sum \frac{\partial f'}{\partial x_i} y_i = 0\right), \tag{1}$$

wo der Akzent bedeutet, daß die partiellen Differentialquotienten für den Punkt P_2 zu bilden sind. Fügen wir zu den vier linearen Gleichungen (1) zwei beliebige andere lineare Gleichungen

$$\sum a_i x_i = 0,\quad \sum b_i x_i = 0$$

hinzu, und bilden die Resultante:

$$R \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 & p'_5 & p'_6 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 & f'_5 & f'_6 \end{vmatrix},$$

welche, nach dem Taylor'schen Satze und einem bekannten Additionstheorem entwickelt, die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_6 \\ b_1 b_2 \dots b_6 \\ p_1 p_2 \dots p_6 \\ f_1 f_2 \dots f_6 \\ p_1 p_2 \dots p_6 \\ f_1 f_2 \dots f_6 \end{vmatrix} + h_1^2 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_6 \\ b_1 b_2 \dots b_6 \\ p_1 p_2 \dots p_6 \\ f_1 f_2 \dots f_6 \\ p_{11} p_{12} \dots p_{16} \\ f_{11} f_{12} \dots f_{16} \end{vmatrix} + h_2^2 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_6 \\ b_1 b_2 \dots b_6 \\ p_1 p_2 \dots p_6 \\ f_1 f_2 \dots f_6 \\ p_{21} p_{22} \dots p_{26} \\ f_{21} f_{22} \dots f_{26} \end{vmatrix} + \dots + h_6^2 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \dots a_6 \\ b_1 b_2 \dots b_6 \\ p_1 p_2 \dots p_6 \\ f_1 f_2 \dots f_6 \\ p_{61} p_{62} \dots p_{66} \\ f_{61} f_{62} \dots f_{66} \end{vmatrix} + \dots,$$

wo die p_{ik} und f_{ik} bezüglich die zweiten partiellen Differentialquotienten von p und f bedeuten, so wird R, wenn P_2 unbegrenzt an P_1 heranrückt, d. h. wenn die h_i unendlich klein werden, un-

endlich klein von der zweiten Ordnung. Während zwei beliebige dreidimensionale Räume im Raume von fünf Dimensionen, den Auflösungen von vier linearen Gleichungen mit fünf Unbekannten zufolge eine eindimensionale gerade Linie miteinander gemein haben, durchdringen zwei konsekutive Tangenten einer dreidimensionalen Kurve einander in einer zweidimensionalen Ebene. Zwei dreidimensionale Räume, welche eine zweidimensionale Ebene miteinander gemein haben, können aber durch eine vierdimensionale Ebene verbunden werden.

Sind nun P_1 und P_2 zwei unendlich benachbarte Punkte von f, welchen singuläre Komplexstrahlen entsprechen, so berühren sämtliche Ebenen der durch die beiden Tangenten von f in P_1 und P_2 bestimmten Büschel die Fundamentalfläche. Ihre Berührungspunkte erfüllen zwei gerade Linien g_1 und g_2, welche den Berührungspunkt der Fundamentalfläche mit derjenigen Ebene gemein haben, welche die beiden konsekutiven Tangenten T_1 und T_2 verbindet. Den geraden Linien g_1 und g_2 entsprechen aber in der Liniengeometrie die die singulären Punkte und Ebenen bestimmenden Büschel. Irgend zwei unendlich benachbarte dieser Büschel enthalten daher, und zwar ohne im allgemeinen einen Strahl miteinander gemein zu haben, je einen Strahl, welche einander unendlich benachbart von der zweiten Ordnung sind. Hieraus folgt, daß die den singulären Komplexstrahlen zugeordneten ∞^2 Strahlenbüschel Tangentenbüschel einer Fläche sind.

§ 2.

Ordnung und Klasse der singulären Fläche.

Da die Tangentenbüschel der singulären Fläche durch die singulären Komplexstrahlen x_i und ihre zugeordneten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bestimmt werden, so ergibt sich die Summe von Ordnung und Klasse der singulären Fläche aus folgenden fünf Gleichungen:

$$\sum x_i^2 = 0, \quad f = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0, \quad \sum a_i x_i = 0, \quad \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

$$\left(\sum a_i^2 = 0\right),$$

deren beide letzten unter Voraussetzung von $\sum a_i^2 = 0$ fordern, daß die Linie x_i und ihre zugeordnete Linie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gleichzeitig eine beliebige

gerade Linie a_i treffen, das heißt, daß der Schnittpunkt von x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ auf a_i gelegen ist, oder daß ihre Ebene durch a_i hindurchgeht. Den $2\,n\,2\,(n-1)\,(n-1)$ Auflösungen der Gleichungen (1) zufolge ist daher *die singuläre Fläche von der Ordnung und Klasse:*

$$\tfrac{1}{2}\,4\,n\,(n-1)^2\ ^{57}).$$

§ 3.

Der Rang der singulären Fläche.

Da eine beliebige Tangente der singulären Fläche unter Voraussetzung von:

$$p \equiv \sum x_i^2 = 0, \quad f = 0, \quad F = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

die Koordinaten:

$$y_i = x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

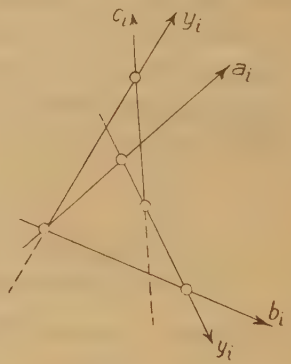
hat, so ergibt sich der Rang der singulären Fläche aus den folgenden sechs Gleichungen:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0$$

$$\sum a_i y_i = 0 \equiv \sum a_i x_i + \lambda \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum b_i y_i = 0 \equiv \sum b_i x_i + \lambda \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum c_i y_i = 0 \equiv \sum c_i x_i + \lambda \sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$



in denen:

$$\sum a_i^2 = 0, \quad \sum b_i^2 = 0, \quad \sum c_i^2 = 0, \quad \sum a_i b_i = 0$$

sein soll. Die drei letzten der Gleichungen sind durch Elimination von λ durch die beiden folgenden:

---

[57]) Auf einem ganz anderen Wege, nämlich nach algebraischen Methoden der ersten Gruppe (vgl. das Vorwort vorliegender Arbeit), ist dieser Satz zuerst von Clebsch (Mathem. Ann., Bd. V, S. 440) bewiesen worden. — Vgl. ferner Voß, l. c., 89 und Mathem. Ann., Bd. VIII, S. 74.

$$\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum a_i x_i - \sum c_i x_i \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum b_i x_i - \sum c_i x_i \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

zu ersetzen, aus deren Lösungen diejenigen der Gleichungen:

$$\sum c_i x_i = 0, \quad \sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

einfach zählend auszuscheiden sind. *Der Rang der singulären Fläche ist daher:*

$$\tfrac{1}{2}\, 4\, n(n-1)\,(n^2 - n + 1)^{58}).$$

§ 4.

Die Ordnung der Kurve der singulären Punkte der Erzeugenden einer durch einen beliebigen Komplex aus der Kongruenz der singulären Linien ausgeschnittenen Linienfläche.

Ein beliebiger Komplex $K = 0$ vom m^{ten} Grade schneidet aus der Kongruenz der singulären Linien eine Linienfläche vom Grade:

$$4\, n(n-1)\, m$$

aus. Die Ordnung der Kurve der den Erzeugenden dieser Linienfläche zugeordneten singulären Punkte ist gleich der Ordnung des Ortes der ihnen zugeordneten singulären Ebenen, d. h. gleich der Klasse der von ihnen umhüllten Developpablen und ergibt sich aus den Gleichungen:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad K = 0$$

$$\sum x_i (a_i + \lambda\, b_i) = 0$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} (a_i + \lambda\, b_i) = 0,$$

in denen $\sum a_i^2 = 0$, $\sum b_i^2 = 0$ und $\sum a_i b_i = 0$ vorausgesetzt ist, welche also fordern, daß entweder der singuläre Punkt in der Ebene der Linien a_i und b_i gelegen ist oder die singuläre Ebene durch den Schnittpunkt der Linien a_i und b_i hindurchgeht. Die beiden letzten

---

58) Voß, l. c., S. 92.

der Gleichungen sind durch Elimination von λ durch die folgende zu ersetzen:

$$\sum x_i a_i \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i - \sum x_i b_i \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i = 0.$$

Man erhält daher den allgemeinen Satz[59]), von dem wir wiederholt Gebrauch machen werden:

Die Ordnung der Kurve, welche von den singulären Punkten gebildet wird, die den Erzeugenden einer durch einen beliebigen Komplex aus der Kongruenz der singulären Linien eines Komplexes n^{ten} Grades ausgeschnittenen Linienfläche zugeordnet sind, ist gleich dem $\frac{n}{2}$-fachen des Grades dieser Linienfläche.

§ 5.

Die Haupttangenten der singulären Fläche.

Damit die Tangente der singulären Fläche im singulären Punkte der Geraden x_i:

$$y_i = \mu x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

identisch sei mit der unendlich nahe liegenden:

$$y_i' = \mu d x_i + x_i d\mu + d\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wo:

$$d\frac{\partial f}{\partial x_i} = (n-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} d x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} d x_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_6} d x_6\right)$$

ist, welche durch den auf der singulären Geraden $x_i + d x_i$ liegenden singulären Punkt geht, müssen die Gleichungen:

$$\begin{gathered} \mu d x_i + x_i d\mu + d\frac{\partial f}{\partial x_i} + d t\left(\mu x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0 \\ \sum c_i d x_i = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} d x_i = 0 \\ \sum x_i d x_i = 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} d x_i = 0 \end{gathered} \qquad (1)$$

[59]) Der Satz erscheint jedoch als Spezialfall eines allgemeineren von Herrn Voß gegebenen Theorems, wenn man, wie es in den Arbeiten der Herren Pasch

bestehen und zwar unter Voraussetzung des Bestehens der Gleichungen:

$$p = \Sigma x_i^2 = 0, \quad f = \Sigma x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad F = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \qquad (2)$$

Multipliziert man die sechs ersten der Gleichungen (1) der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots x_6$, so entsteht:

$$(n-1)\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \mu \Sigma x_i dx_i = 0,$$

wird dagegen mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_6}$ multipliziert, so erhält man:

$$(n-1)\Sigma \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \mu \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Man hat daher aus den ersten acht der Gleichungen (1) die Differentiale dx_i, $d\mu$, dt zu eliminieren. Dies gibt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (n-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \mu & x_i \\ x_i & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher μ nur den Diagonalelementen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ angehört und welche daher für: $\frac{-f}{n-1} = \mu$ mit Gleichung (3) von Kap. II, § 3 identisch ist.

Zur Bestimmung der Haupttangenten in einem Punkte der singulären Fläche hat man folglich die quadratische Gleichung:

$$\mu^2 a_1 + \mu a_2 + a_3 = 0, \qquad (3)$$

in welcher:

$$a_1 = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$a_2 = \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_1 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$a_3 = \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} + a_1 \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_2 \Sigma \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

---

und Voß durchgehends geschehen ist, die singuläre Fläche als unvollständige Brennfläche der Kongruenz der singulären Linie auffaßt. — Siehe Voß, l. c., S. 106 ff.

ist, während a_1 und a_2 bezüglich homogene Funktionen der x_i vom Grade $n-2$ und $2(n-2)$ sind. Die *Kongruenz der Haupttangenten der singulären Fläche ist* daher, den Auflösungen der folgenden Gleichungen entsprechend:

$$p = 0, \qquad f = 0, \qquad F = 0$$

$$\mu \sum a_i x_i + \sum a_i f_i = 0, \qquad \mu \sum b_i x_i + \sum b_i f_i = 0$$

$$\mu^2 a_1 + \mu a_2 + a_3 = 0,$$

wo $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, und deren drei letzte durch Elimination von μ durch die folgenden ersetzt werden können:

$$a_1 (\sum a_i f_i)^2 + a_2 \sum a_i x_i \sum a_i f_i + a_3 (\sum a_i x_i)^2 = 0$$

$$\sum a_i f_i \sum b_i x_i - \sum a_i x_i \sum b_i f_i = 0,$$

aus denen die Lösungen der Gleichungen:

$$\sum a_i x_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum a_i f_i = 0$$

doppelt zählend auszuscheiden sind, *von der Ordnung und Klasse:*

$$J = \tfrac{1}{2} 2n(n-1)(5n^2 - 8n + 2) \ ^{60}).$$

§ 6.

Die Linienfläche der die singuläre Fläche dreipunktig tangierenden singulären Komplexstrahlen.

Die Linienfläche der Haupttangenten der singulären Fläche, welche in der Kongruenz der singulären Linien enthalten sind, wird durch den Komplex:

$$a_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

aus dieser ausgeschnitten. Sie ist somit vom Grade:

$$4n(n-1)(3n-4) \ ^{61}).$$

Dieses Resultat hätte sich übrigens unmittelbar aus den früheren Betrachtungen entnehmen lassen. Die Elemente der singulären

---

60) Voß, l. c., S. 103.
61) Voß, l. c., S. 144.

Fläche, d. h. die Tangentenbüschel in einem beliebigen Punkte, entsprechen vermöge $F = 0$ denjenigen unter den Verbindungsgeraden der Punkte x_i von $f \equiv (p = 0, f = 0)$ mit den ihnen zugeordneten Punkten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, welche $f = 0$ im Punkte x_i tangieren. Ist:

$$a_1 \equiv \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

so oskuliert die Verbindungsgerade der Punkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $f = 0$ im Punkte x_i. Die dem Punkte x_i entsprechende singuläre Linie gehört daher zwei unendlich benachbarten Elementen der singulären Fläche an, d. h. sie ist Haupttangente.

§ 7.

Singuläre Komplexstrahlen, welche die singuläre Fläche vier- oder mehrpunktig berühren.

Ganz ebenso ergeben sich die Bedingungen, welchen die in der Kongruenz der singulären Linien des Komplexes enthaltenen, die singuläre Fläche mehrpunktig berührenden Strahlen zu genügen haben: es müssen für einen die singuläre Fläche n-punktig berührenden singulären Komplexstrahl die Koeffizienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen von λ in der Entwicklung von:

$$f\left(x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

nach Potenzen von λ verschwinden. Im allgemeinen sind natürlich nur vierpunktig berührende Strahlen vorhanden. Sie werden aus der Linienfläche der singulären Haupttangenten durch den Komplex:

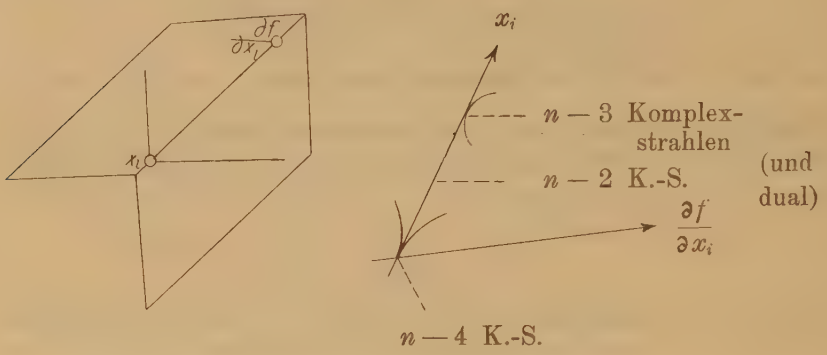
$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = 0$$

ausgeschnitten. Es gibt demnach:

$$8\,n\,(n-1)\,(3\,n-4)\,(2\,n-3)$$

die singuläre Fläche vierpunktig berührende singuläre Komplexstrahlen. Die ihnen zugeordneten singulären Ebenen enthalten Komplexkurven, für welche sie Doppel- und gleichzeitig Spitzentangenten sind, d. h. Doppeltangenten, deren einer Berührungspunkt ein Rückkehrpunkt

der Komplexkurve ist. Der Rückkehrpunkt koinzidiert mit dem singulären Punkte. Gleichzeitig sind dual die ihnen zugeordneten singulären Punkte Spitzen von Kegeln, deren Doppelkante gleichzeitig Wendekante ist. Die Wendeebene koinzidiert mit der singulären Ebene:



Für Komplexe *dritten* Grades erleiden die soeben ausgestellten Überlegungen insofern eine Modifikation, als hier, wenn x_i ein die singuläre Fläche vierpunktig berührender singulärer Komplexstrahl ist, das durch x_i und seine zugeordnete Linie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bestimmte Büschel dem Komplex vollständig angehört. Die Komplexkurve der singulären Ebene und dual der Komplexkegel des singulären Punktes einer solchen Linie zerfällt daher für Komplexe dritten Grades in ein Büschel und einen Kegelschnitt bzw. einen Kegel der zweiten Ordnung. Die singuläre Ebene enthält daher eine Komplexkurve mit zwei Doppeltangenten und dual hat der Komplexkegel des singulären Punktes zwei (nicht mit jenen zusammenfallende) Doppelkanten. Die singulären Punkte sind demnach Punkte der Doppelkurve der singulären Fläche und die ihnen zugeordneten singulären Ebenen sind Ebenen der Doppel-Developpablen derselben[62]).

Für Komplexe *zweiten* Grades verliert die zuletzt abgeleitete Formel natürlich ihre Gültigkeit, weil für $n = 2$ die dritten Differentialquotienten verschwinden. Die Zahl der die singuläre Fläche vierpunktig berührenden singulären Komplexstrahlen läßt sich hier jedoch unmittelbar aus einem früher gegebenen Theorem entnehmen.

[62]) Siehe § 12 dieses Kapitels. — Ferner Voß, l. c., S. 159.

Der Kegel Ψ der $p = 0$ im Punkte x_i tangierenden und $f = 0$ in demselben Punkte oskulierenden geraden Linien berührt den in ein Ebenenpaar degenerierten Kegel Φ der in $p = 0$ gelegenen Tangenten von $f = 0$ im Punkte x_i längs der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen, wenn die Gleichungen:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

bestehen. In diesem Falle ist demnach die singuläre Linie x_i entweder vierpunktig und dreiebenig[63]), oder dreipunktig und vierebenig berührende singuläre Linie der singulären Fläche des Komplexes zweiten Grades. Die Kongruenz der singulären Linien enthält daher je 16 solcher Linien. Sie sind parabolische bzw. Rückkehr-Haupttangenten[64]), woraus hervorgeht, daß die parabolische Kurve der singulären Fläche des Komplexes zweiten Grades ein Bestandteil der totalen Kurve der vierpunktigen Berührung sein muß, worauf wir an späterer Stelle[65]) zurückkommen werden.

§ 8.

Die Kurve der singulären Punkte der die singuläre Fläche dreipunktig berührenden singulären Komplexstrahlen.

Die Berührungskurve der Linienfläche:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

der in der Kongruenz der singulären Linien enthaltenen Haupttangenten der singulären Fläche mit der letzteren ist nach dem allgemeinen Theorem von Kapitel III, § 4 von der Ordnung:

$$4n(n-1)(3n-4)\frac{n}{2}.$$

[63]) Die Ausdrucksweise der Herren Reye (Journal für Mathem., Bd. 95) und Sturm (l. c., Bd. III, S. 52), welche die Gesamtheit dieser Linien schlechtweg als vierpunktige Tangenten bezeichnen, kann leicht zu Mißverständnissen Veranlassung geben.

[64]) Wie man auch ohne die Ausführungen des neunten Paragraphen dieses Kapitels für Komplexe zweiten Grades unschwer beweist.

[65]) Kapitel VI.

Sie hat eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften[66]). Einerseits ist sie die Berührungskurve der singulären Fläche mit der dem Komplex zugeordneten *akzessorischen Fläche*[67]), d. h. derjenigen Fläche, welche die singuläre Fläche zur vollständigen Brennfläche der Kongruenz der singulären Linie ergänzt, und zwar ist sie wegen des Verschwindens der Diskriminante der für λ quadratischen Gleichung[68]):

$$\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

die zur *Selbstberührungskurve der Brennfläche der Kongruenz:*

$$p = 0, \qquad f = 0, \qquad F = 0$$

degenerierten Kurve derjenigen Punkte, in welchen die Brennfläche von Strahlen der Kongruenz vierpunktig berührt wird[69]). Anderseits läßt sie sich als *Grenzlage eines Teiles des Schnittes der singulären Flächen der Komplexe:*

$$f = 0 \qquad \text{und} \qquad f' \equiv q f + \lambda F = 0$$

betrachten, wo q eine willkürliche homogene Funktion der x_i vom $(n - 2)$. Grade und λ einen gegen 0 konvergierenden variablen Parameter bedeutet.

Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir aus von den Gleichungen (1), welche die singulären Haupttangenten der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$ bestimmen. Diese Linien gehören, wie sämtliche singulären Linien des Komplexes $f' = 0$, und zwar für jeden Wert von λ dem Komplex $f' = 0$ an.

Der Punkt $\frac{\partial f'}{\partial x_i}$, um wieder in der Sprache der mehrdimensionalen Geometrie zu reden, bestimmt mit dem einem und demselben Punkte x_i zugeordneten Punkte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine die Fundamentalfläche $p = 0$ unter Voraussetzung der Gleichungen (1) im Punkte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tangierende gerade Linie. Denn es verschwindet unter dieser Voraussetzung außer dem Koeffizienten von μ^0 auch derjenige von μ^1:

[66]) Siehe auch den letzten Paragraphen des V. Kapitels vorliegender Arbeit.
[67]) Voß, l. c., S. 89.
[68]) Siehe Kapitel VI vorliegender Arbeit.
[69]) Vgl. Voß, l. c., S. 84 ff.

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f'}{\partial x_i} = q\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \lambda\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

in der Entwicklung von:

$$p\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial f'}{\partial x_i}\right)$$

nach Potenzen von μ, und zwar für jeden Wert von λ. Die Koordinaten der singulären Linien des Komplexes $f' = 0$ haben der Gleichung:

$$\begin{aligned} F' \equiv \quad & \left[\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 q^2 + f^2\Sigma\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)^2 + 2fq\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right] \\ & + 2\lambda\left[q\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + f\Sigma\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] \\ & + \lambda^2\left[\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\right] = 0 \end{aligned}$$

zu genügen. Wird λ so klein, daß λ^2 gegen λ vernachlässigt werden darf, so rückt der Punkt $\frac{\partial f'}{\partial x_i}$ auf einer die Fundamentalfläche $p = 0$ im Punkte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tangierenden geraden Linie unbegrenzt an den Punkt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heran, und die den beiden Komplexen $f = 0$ und $f' = 0$ gemeinsamen, durch die Gleichungen (1) gegebenen Linien x_i sind auch für den Komplex $f' = 0$ singuläre Komplexstrahlen. Die ihnen vermöge der beiden Komplexe $f = 0$ und $f' = 0$ zugeordneten Linien:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f'}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\lambda}{q}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

sind alsdann, da im allgemeinen die Verbindungsgerade der unendlich benachbarten Punkte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial f'}{\partial x_i}$ zwar Tangente der Fundamentalfläche $p = 0$, aber nicht ganz in ihr gelegene gerade Linie ist[70]), zwei einander unendlich benachbarte, windschiefe gerade Linien,

[70]) Hierin liegt die geometrische Begründung der bekannten Bedingung des Schneidens zweier einander unendlich benachbarter geraden Linien x_i und $x_i + dx_i$: $\sum dx_i^2 = 0$.

welche auf der Geraden x_i zwei von derselben Ordnung unendlich benachbarte Punkte $\left(x_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ und $\left(x_i, \frac{\partial f'}{\partial x_i}\right)$ ausschneiden und mit x_i zwei von derselben Ordnung unendlich benachbarte Ebenen bestimmen. Die gerade Linie x_i ist aber Haupttangente der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$. Es gehört der letzteren daher auch der ihrem Berührungspunkte $\left(x_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ mit der Linie x_i unendlich benachbarte Punkt $\left(x_i, \frac{\partial f'}{\partial x_i}\right)$ der singulären Fläche des Komplexes $f' = 0$ an und dual. q. e. d.

Für Komplexe *zweiten* Grades ist die Kurve der singulären Punkte der der Kongruenz der singulären Linien angehörenden Haupttangenten der singulären Fläche von der 16. Ordnung und, wie sich geometrisch unschwer beweisen läßt[71]), Haupttangentenkurve der singulären Fläche. Andererseits ist für Komplexe zweiten Grades $f' = 0$ ebenfalls ein Komplex zweiten Grades. Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Theorie der konfokalen Komplexe[72]) der zuerst von Herrn Reye[73]) bewiesene Satz, nach welchem *die Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche der vierten Ordnung und Klasse Grundkurven von Flächenbüscheln der vierten Ordnung sind.*

Multipliziert man die sechs Gleichungen:

$$\mu\, dx_i + x_i\, d\mu + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + dt\left(\mu x_i + \frac{\partial f'}{\partial x_i}\right) = 0,$$

welche fordern, daß zwei unendlich benachbarte Tangenten unendlich benachbarter Punkte der singulären Fläche zusammenfallen, der Reihe nach mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_6}, \qquad \text{wo} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_1^6{}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

ist, so ergibt sich unter Voraussetzung von:

$$p = 0, \qquad f = 0, \qquad F = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

woraus weiter folgt:

---

[71]) Vgl. z. B. Sturm, l. c., Bd. III, S. 51.
[72]) Vgl. Kap. VI der vorliegenden Arbeit.
[73]) Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 97, S. 253.

$$dp = \sum x_i\, dx_i = 0, \qquad df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = 0$$

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \qquad d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) dx_i = 0$$

als notwendige, und wie sich zeigen läßt [74]), hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve der singulären Punkte der der Kongruenz der singulären Linien angehörenden Haupttangenten der singulären Fläche eine *Haupttangentenkurve* derselben ist, die Differentialgleichung:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$$

Da:

$$d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$$

ist, und wegen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_1^6{}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\, dx_l$$

und:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_k$$

und somit:

$$d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 2\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\, dx_l$$

ist, so ist die Bedingung:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$$

im allgemeinen nicht erfüllt. Sie besteht jedoch wegen des Verschwindens der dritten Differentialquotienten in der Tat für Komplexe *zweiten* Grades.

Wegen des Verschwindens der zweiten nicht nach derselben Veränderlichen genommenen Differentialquotienten und wegen der infolgedessen für die Haupttangenten der singulären Fläche, welche

---

[74]) Voß, l. c., S. 121.

der Kongruenz der singulären Linien angehören, bestehenden Differentialgleichung:

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} dx_l = \Sigma \frac{\partial F}{\partial x_i} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

beispielsweise auch für Komplexe *beliebigen* Grades, deren Gleichungen sich auf die Form:

$$\Sigma a_i x_i^n = 0$$

bringen lassen. Alsdann haben die in Frage stehenden Haupttangentenkurven mit den Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche, wegen:

$$\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}$$

die Eigenschaft gemein, der Rückkehrkurve[75]) der singulären Fläche in:

$$\tfrac{1}{2} 8 n (n-1)(3n-4)(2n-3)$$

für sie *stationären* Punkten und der parabolischen Kurve in ebensovielen Punkten zu begegnen, deren Ebenen für sie stationär sind, und zwar *gehören die Punkte beider Gruppen der Kurve der vierpunktigen Berührung der singulären Fläche an.*

Der *Rang* der in Frage stehenden Haupttangentenkurve ergibt sich aus den Gleichungen:

$$p = 0, \qquad f = 0, \qquad F = 0, \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

$$\Sigma a_i \left(x_i \mu + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0,$$

$$a_2 \mu + a_3 = 0,$$

wo $\Sigma a_i^2 = 0$ ist und a_2 und a_3 die an früherer Stelle bezeichneten Funktionen sind. Da die Resultante der beiden letzten Gleichungen:

$$a_3 \Sigma a_i x_i - a_2 \Sigma a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

eine Funktion vom Grade $5n - 7$ ist, so erhält man:

$$4 n (n-1)(3n-4)(5n-7),$$

---

[75]) Siehe die Ausführungen des nächsten Paragraphen dieses Kapitels der vorliegenden Arbeit.

woraus sich für $n = 2$ als Rangzahl der Haupttangentenkurven der Kummers'schen Fläche die Zahl 48 ergibt, eine Zahl, die sich übrigens auch der Gradzahl:

$$12\,n\,(2\,n - 3)\,(3\,n - 4)$$

hätte entnehmen lassen, welche früher[76]) für die Linienfläche von nichtsingulären Komplexstrahlen berechnet worden ist, für deren Erzeugende die Spitzen dreier der vier Kegel, für welche eine Komplexgerade im allgemeinen Wendekante ist, zusammenfallen.

§ 9.

Die parabolischen und Rückkehr-Haupttangenten der singulären Fläche.

Die beiden Haupttangenten in einem Punkte $\left(x_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ der singulären Fläche werden, wie wir gesehen haben, durch die für μ quadratische Gleichung:

$$\mu^2 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu\left[\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_1 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] + \left[\Sigma \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right.$$

$$\left. + a_1 \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 + a_2 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = 0$$

bestimmt. Sie fallen daher zusammen, wenn die Diskriminante dieser Gleichung:

$$4\,a_1\,a_3 - a_2^2$$

verschwindet. Das Verschwinden dieser Invariante enthält aber andererseits die Bedingung dafür, daß die singuläre Linie für eine Komplexkurve Wendetangente oder für einen Komplexkegel Rückkehrkante ist. Bezeichnet man die Tangentialebenen in den Punkten der parabolischen Kurve einer Fläche als parabolische Ebenen, so ergibt sich der Satz:

Die parabolischen Ebenen der singulären Fläche enthalten Komplexkurven mit Wendetangente, während die Rückkehrkurve der Ort der Spitzen von Komplexkegeln mit Rückkehrkante ist[77]).

---

[76]) Kap. II, § 3 vorliegender Arbeit.

[77]) Voß, l. c., S. 144.

Der Wendepunkt der Komplexkurve rückt in den parabolischen Punkt der singulären Fläche oder die Rückkehrtangentialebene koinzidiert mit der der Rückkehrkante zugeordneten singulären Ebene, wenn die Gleichungen:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0, \quad \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

erfüllt sind, d. h. für diejenigen parabolischen oder Rückkehr-Haupttangenten, welche der Kongruenz der singulären Linien angehören.

§ 10.

Bestimmung der Summe der Ordnungszahlen P und R der parabolischen und Rückkehrkurve der singulären Fläche.

Die Ordnungszahlen P und R der parabolischen und Rückkehrkurve der singulären Fläche können nicht direkt ermittelt werden. Hingegen ergibt sich die Summe der beiden Zahlen unmittelbar aus einem früher[78]) gegebenen allgemeinen Theorem. Sie ist gleich dem $\frac{n}{2}$-fachen des Grades der Linienfläche, welche durch den Komplex:

$$4\, a_1 a_3 - a_2^2 = 0$$

aus der Kongruenz der singulären Linien ausgeschnitten wird. Es ist daher:

$$P + R = \tfrac{1}{2}\, 16\, n^2 (n-1)(2n-3)\ ^{79}).$$

§ 11.

Bestimmung des Ranges der parabolischen und Rückkehrkurve.

Die Rückkehrkurve einer Fläche kann als Doppelkurve mit zusammenfallenden Tangentialebenen in jedem ihrer Punkte betrachtet werden. Dual kann die Developpable der parabolischen Ebenen als Doppeldeveloppable mit zusammenfallenden Berührungspunkten in jeder ihrer Ebenen aufgefaßt werden. Den Punkten der Rückkehrkurve einer allgemeinen Klassenfläche entsprechen daher die Ebenen der parabolischen Kurve einer allgemeinen Ordnungsfläche dualistisch.

---

[78]) Kap. III, § 4 vorliegender Arbeit.

[79]) Voß, l. c., S. 147.

Insbesondere sind die Tangenten der Rückkehrkurve den Haupttangenten der parabolischen Kurve zugeordnet und dual. Liniengeometrisch sind aber beide Kurven für die singuläre Fläche als Ort der Berührungspunkte zusammenfallender Haupttangenten definiert. Es ist demnach für die singuläre Fläche, da sie wie ein in sich selbst reziprokes Gebilde betrachtet werden darf:

der Rang der parabolischen Kurve
= der Ordnung der Developpablen der Rückkehr-Haupttangenten,
= der Ordnung der Developpablen der parabolischen Haupttangenten,
= dem Range der Rückkehrkurve[80]).

Da allgemein bei zwei reziproken Flächen die Ordnung der Rückkehrkurve gleich der Klasse der parabolischen Ebenen ist, so stellt die Zahl $P + R$ gleichzeitig die Summe von Ordnung und Klasse der parabolischen Kurve dar und dual, wenn die parabolischen Ebenen Schmiegungsebenen der parabolischen Kurve sind und dual, was für Komplexe zweiten Grades der Fall ist.

Die Summe der Ordnungen der Developpablen der parabolischen bzw. Rückkehr-Haupttangenten läßt sich liniengeometrisch unmittelbar bestimmen. Sie ist gleich der Anzahl der zusammenfallenden Haupttangenten der singulären Fläche, welche eine beliebige gerade Linie a_i treffen, und ergibt sich daher aus den Gleichungen:

$$p = 0, \quad f = 0, \quad F = 0,$$
$$4\,a_1 a_3 - a_2^2 = 0,$$
$$\sum \left(\mu x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) a_i = 0,$$
$$\mu^2 a_1 + \mu a_2 + a_3 = 0.$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen sind durch Elimination von μ, wobei zu beachten ist, daß die vierte der Gleichungen die Diskriminante der letzten ist, durch die Bedingung:

$$a_1 \sum a_i x_i - \frac{1}{2} a_2 \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

zu ersetzen, so daß die Lösungen der Gleichungen:

---

[80]) Vgl. die ausführliche lichtvolle Darlegung dieser Verhältnisse in dem wiederholt zitierten Aufsatze von Herrn Voß (S. 134 f.).

$$a_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_2 = 0$$

als der Aufgabe fremd, einfach zählend auszuscheiden sind. Es ist daher der Rang der parabolischen sowie der Rückkehrkurve:

$$K = \tfrac{1}{2}\, 4n\,(n-1)\,(4n-6)\,(5n-6)\ ^{81}).$$

§ 12.

Bestimmung weiterer Charakteristiken der singulären Fläche.

Auf Grund der unmittelbar bestimmten Zahlen:

$$\begin{aligned} N &= 2n\,(n-1)^2 \\ S &= 2n\,(n-1)\,(n^2-n+1) \\ J &= 2n\,(n-1)\,(5n^2-8n+2) \\ P+R &= 8n^2\,(n-1)\,(2n-3) \\ K &= 2n\,(n-1)\,(4n-6)\,(5n-6) \end{aligned}$$

lassen sich vermittels der Pluecker'schen und Salmon'schen Formeln sämtliche Charakteristiken der singulären Fläche berechnen. Ja man hat sogar in der Cayley'schen Gleichung:

$$4N(N-2) - 8D - 11R - P = 0,$$

welche lehrt, daß eine Doppel- bzw. Rückkehrkurve im Schnitte der Hesse'schen Determinantenfläche mit der Originalfläche acht- bzw. elffach zählt, noch eine Kontrolle[82]). Wir berechnen hier nur diejenigen Zahlen, welche für die Theorie der Komplexe an sich von Interesse sind, nämlich:

$$R,\quad P,\quad D,\quad t,\quad \gamma,\quad \beta,$$

deren vier letzte bezüglich die Ordnungszahl der Doppelkurve, die Zahl ihrer dreifachen und stationären Punkte sowie die Zahl der stationären Punkte der Rückkehrkurve, bzw. die Zahlen der ihnen dualistisch entsprechenden Singularitäten sind. Man erhält[83]):

---

[81]) Voß, l. c., S. 134.
[82]) Voß, l. c., S. 136.
[83]) Voß, l. c., S. 147.

$$R = J - 3S + 3N$$
$$= 4n(n-1)(n-2)(n+1)$$
$$D = \tfrac{1}{2}(8S + N^2 - 10N - 3J)$$
$$= n(n-1)(n-2)(2n^3 - 2n^2 - 5n - 6)$$
$$P = 4n(n-1)^2(3n-2)$$

$$\beta = 3K - 5P + R[N^2 - N + 1 - 3R - S - 2D]$$
$$= 4n(n-1)(16n^2 - 57n + 42)$$
$$\gamma = R(N-2) - 2P - 4\beta$$
$$= 8n(n-1)(n-3)[n^4 + n^2 - 30n + 28]$$
$$t = \tfrac{1}{3}[J + 2P + (N-2)(D-S) - 2\beta - 3\gamma]$$
$$= \tfrac{2}{3}(n-1)[2n^7 - 10n^6 - n^5 + 40n^4 - 11n^3 + 338n^2 - 1212n + 840].$$

Die *Doppelkurve der singulären Fläche* ist natürlich der Ort der Spitzen von Kegeln mit zwei Doppelkanten, während von ihren dreifachen Punkten Kegel mit drei Doppelkanten ausgehen. Die Doppel- und Rückkehrkurve der singulären Fläche begegnen einander in zwei Gruppen von Punkten. Die einen sind stationäre Punkte der Doppelkurve und die von ihnen ausgehenden Kegel haben eine Doppel- und eine Rückkehrkante. Die anderen sind stationäre Punkte der Rückkehrkurve und die von ihnen ausgehenden Komplexkegel haben zwei ∞-nahe Doppelkanten, d. h. eine Selbstberührungskante. Dual enthält ein algebraischer Linienkomplex im allgemeinen γ mit Doppel- und Wendetangente, β mit einer Selbstberührungstangente und t mit drei Doppeltangenten behaftete Komplexkurven.

Die Selbstberührungskanten von Komplexkegeln und dual die Selbstberührungstangenten von Komplexkurven sind bezüglich Torsallinien der Regelflächen von Paaren von Doppelkanten eines und desselben Komplexkegels bzw. von Paaren von Doppeltangenten von Komplexkurven mit zwei Doppeltangenten. Sie gehören der Kongruenz der Undulationskanten von Komplexkegeln bzw. Bicuspidalpunktstangenten von Komplexkurven an, von der im nächsten Kapitel die Rede sein wird. Denn der von dem Selbstberührungspunkte einer Komplexkurve ausgehende Kegel hat die Selbstberührungstangente zur Undulationskante und dual.

Bei Komplexen *dritten* Grades sind die eben erwähnten Regelflächen von Paaren von Doppelkanten von Komplexkegeln mit zwei Doppekanten bzw. dual der vollständige Schnitt der Kongruenz der

singulären Linien mit derjenigen der Undulationskanten. Die Gradzahl einer jeden beträgt daher:

$$\tfrac{1}{2}\, 2n\, 2(n-1)\, 2(11n-18) = 360.$$

Die Doppelkurve der singulären Fläche ist gleichzeitig Doppelkurve für jede dieser beiden Regelflächen. Denn jede Doppeltangentialebene der singulären Fläche enthält je zwei einander in einem und demselben Punkte der Doppelkurve schneidende Erzeugende der beiden Linienflächen.

Kapitel IV.

Die Singularitäten der ersten Gruppe und die mit ihnen verknüpften kovarianten Flächen und Kongruenzen.

Wir wenden uns nunmehr der Betrachtung der Singularitäten der ersten Art und der mit ihnen verknüpften kovarianten Kongruenzen, Flächen und Linienflächen, Kurven und Developpablen eines Komplexes zu. Die Zahl dieser Gebilde ist so groß, daß ihre vollständige Theorie an dieser Stelle keineswegs gegeben werden kann. Es kommt noch hinzu, daß die algebraischen Methoden, wegen der durch die Resultantenbildungen erforderlichen Ausscheidungen von überflüssigen Faktoren und der Aufgabe fremden Auflösungen versagen oder doch auf beträchtliche Schwierigkeiten zu führen scheinen, da die Gradzahlen der meisten der in Rede stehenden Gebilde nicht allein durch Schnitte und Eliminationsprozesse erhalten werden können. Wir müssen uns daher damit begnügen, einige charakteristische Ableitungen zu geben und im übrigen die Untersuchungen soweit zu führen, daß eine vollständige Aufzählung der Typen von Komplexkurven eines allgemeinen Linienkomplexes gelingt.

§ 1.

Bezeichnet man mit Schubert die Gruppe der Strahlen, welche ein Strahlenbüschel mit einem Komplex gemein hat, als *Komplex-Strahlengruppe,* so sind diejenigen Singularitäten, welche wir als *reine Singularitäten der ersten Art* bezeichnen wollen, dadurch ausgezeichnet, daß auch von einem beliebigen Punkte eines *singulären* Strahles einer solchen Gruppe, d. h. eines Strahles, in welchem zwei oder mehrere

Strahlen der Gruppe vereinigt sind, $n-1$ Tangenten der durch die Ebene der Gruppe bestimmten Komplexkurve ausgehen. Zu den reinen Singularitäten der ersten Art gehören daher zunächst die in dreifacher Mannigfaltigkeit vorhandenen Spitzen und Doppelpunkte von Komplexkurven bzw. die ihnen dualistisch entsprechenden Singularitäten der Komplexkegel.

Die Zahl der Spitzen einer beliebigen Komplexkurve bzw. die Zahl der Wendeebenen eines beliebigen Komplexkegels ist gleich der Zahl der in einer beliebigen Ebene bzw. in einem beliebigen Punkte gelegenen Strahlenbüschel, welche in der Fundamentalfläche $p=0$ gelegenen $f=0$ oskulierenden geraden Linien entsprechen. Die vier Schnittgeraden der Kegel Φ und Ψ, deren Erzeugende $p=0$ in einem Punkte x_i von $f=(p=0,\ f=0)$ oskulieren und $f=0$ in demselben Punkte tangieren oder umgekehrt $f=0$ oskulieren und $p=0$ tangieren, sind die Verbindungsgeraden des Punktes x_i mit den vier Punkten y_i, deren Koordinaten den folgenden fünf Gleichungen zu genügen haben:

$$\begin{aligned} \sum c_i y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial p}{\partial x_i} y_i = \sum x_i y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \sum y_i^2 &= 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Soll die Spitze einer Komplexkurve in einer beliebigen, durch die beiden Strahlen a_i und b_i bestimmten Ebene liegen bzw. die Wendeebene eines Komplexkegels durch ihren Schnittpunkt hindurchgehen, so müssen sowohl der Strahl x_i als auch der Strahl y_i dieser Ebene angehören, bzw. dual. Die x_i haben daher den folgenden vier Gleichungen zu genügen:

$$\begin{aligned} p = \sum x_i^2 &= 0 \\ f &= 0 \\ \sum a_i x_i &= 0 \\ \sum b_i x_i &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

in denen $\sum a_i^2 = 0$, $\sum b_i^2 = 0$ und $\sum a_i b_i = 0$ vorausgesetzt ist, während die y_i sieben Bedingungen erfüllen müssen, die Gleichungen (1) und:

$$\begin{aligned} \sum a_i y_i &= 0 \\ \sum b_i y_i &= 0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) müssen demnach ein überzähliges System bilden, was in der Tat der Fall ist. Denn die Punkte x_i und y_i, um wieder in der Sprache der mehrdimensionalen Geometrie zu sprechen, müssen der Fundamentalfläche angehören und überdies in den beiden Ebenen:

$$\begin{aligned} \sum a_i x_i &= 0 \\ \sum b_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

gelegen sein. Der Schnitt dieser beiden Ebenen mit der Fundamentalfläche besteht aber aus zwei zweidimensionalen Ebenen, während ihr Schnitt mit der Fläche $f = 0$ im allgemeinen eine punktallgemeine gewöhnliche Fläche der n^{ten} Ordnung ist. Die Gleichungen (1), (2) und (3) fragen daher nach den in zwei beliebigen Ebenen gelegenen Haupttangenten einer gewöhnlichen Fläche der n^{ten} Ordnung, womit das Problem der Bestimmung der Rückkehrtangenten einer beliebigen Komplexkurve bzw. der Wendekanten eines beliebigen Komplexkegels als mit der Frage nach den Wendetangenten einer allgemeinen ebenen Kurve der n^{ten} Ordnung identisch erkannt ist. Hiermit ist nach Prinzipien der Liniengeometrie bewiesen, daß eine beliebige Komplexkurve eines allgemeinen Komplexes des n^{ten} Grades die allgemeine Kurve der n^{ten} Klasse ist.

Die Zahl der Spitzen einer beliebigen Komplexkurve beträgt daher, da die Resultante aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_1^4{}^i c_i y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i &= 0 \\ \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} y_i y_k &= 0 \\ \sum a_i y_i &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

nach Absonderung des Faktors $(\sum c_i x_i)^2$ in den x_i vom Grade

$$2(n-1) + (n-2) - 2$$

ist, bekanntlich:

$$\mu^3 \varepsilon_3 \text{ [84]} = 3\,n\,(n-2).$$

Ebenso findet man, indem man die letzte der Gleichungen (1) bzw. die vorletzte der Gleichungen (4) durch die Gleichung $D(x_i y_i) = 0$ ersetzt, wo D die Diskriminante der Gleichung:

$$f(\lambda) = f(x_i + \lambda y_i) = 0$$

unter Voraussetzung von:

$$f = 0, \qquad \sum_1^{6\text{ vel }4} \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

bedeutet, als Zahl der Doppelpunkte einer beliebigen Komplexkurve [85]) die bekannte Zahl:

$$\mu^3 \varepsilon_{22} = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-2)\,(n^2-9).$$

§ 2.

Es kann vorkommen, daß eine von den sechs die Fläche $f = 0$ hyperoskulierenden Erzeugenden des Kegels Ψ:

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} y_i y_k y_l = 0$$

mit einer der vier Schnittgeraden mit dem Kegel Φ koinzidiert. In diesem Falle bestimmt das dieser geraden Linie entsprechende Strahlenbüschel einen Komplexkegel mit Undulationskante und gleichzeitig eine Komplexkurve mit einer „höheren“ Spitze. Ein „Rückkehrpunkt“ dieser Art entspricht einer Undulationstangente einer ebenen Kurve dualistisch. Er repräsentiert daher einen dreifachen Punkt, der sich äußerlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkte durch

---

[84]) Wir fügen im folgenden solchen Zahlen, welche sich in dem im Vorwort erwähnten Aufsatz von Herrn Schubert befinden, die dort verwandten Symbole bei. Diese Symbole bilden überdies eine bequeme Bezeichnung der Gebilde selbst, von der wir wiederholt Gebrauch machen werden.

[85]) Wir unterlassen es weiterhin im allgemeinen, auch den dualistisch entsprechenden Satz hinzuzuschreiben.

nichts unterscheidet. Ein solcher Punkt ist unter dem Namen Bicuspidalpunkt bekannt.

Da die Koordinaten der Geraden y_i, welche mit x_i die Bicuspidalpunkte bzw. Undulationsebenen bestimmen, den folgenden sechs Gleichungen zu genügen haben:

$$\sum c_i y_i = 0$$

$$\sum x_i y_i = 0$$

$$\sum y_i^2 = 0$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} y_i y_k y_l = 0,$$

so wird die *Kongruenz der Undulationskanten* bzw. *Bicuspidalpunkts-Tangenten* durch einen Komplex vom Grade:

$$12 + 12(n-1) + 6(n-2) + 4(n-3) - 12 = 2(11n - 18)$$ [86])

aus dem gegebenen Komplex ausgeschnitten. Der Grad der Kongruenz ist daher:

$$\varepsilon_4 h_{4e} = \varepsilon_4 h_{4p} = 2n(11n - 18).$$

Die Ordnungszahl der von den Bicuspidalpunkten ε_4 von Komplexkurven gebildeten Fläche ist gleich der Klassenzahl der von ihren Ebenen, den Undulationsebenen der von den Bicuspidalpunkten ausgehenden Kegel, umhüllten Fläche und beträgt, wie sich aus einem von Clebsch[87]) gegebenen Theorem entnehmen läßt:

$$\varepsilon_4 c^2 = \varepsilon_4 \mu^2 = 4n(n-3)(3n-2)$$ [88]).

§ 3.

Unter den Erzeugenden des Kegels Φ befindet sich eine gewisse Zahl, welche die Fläche $f = 0$ noch in einem zweiten Punkte berühren. Da die Diskriminante der Gleichung:

---

[86]) Voß, l. c., S. 74.

[87]) Göttinger Nachrichten 1872, wieder abgedruckt in den Mathem. Ann., Bd. V, S. 441.

[88]) Voß, l. c., S. 74 und 141.

$$f(\lambda) = f(x_i + \lambda y_i) = 0$$

unter Voraussetzung von:

$$f = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

in Bezug auf die y_i vom Grade $(n+2)(n-3)$ ist, so ist ein beliebiger Komplexstrahl den Wurzeln der Gleichungen:

$$\sum c_i y_i = 0, \quad \sum x_i y_i = 0, \quad \sum y_i^2 = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0, \quad D(x_i y_i) = 0,$$

zufolge für $2(n+2)(n-3)$ Komplexkurven Tangente eines Doppelpunktes [89]).

Fällt eine Erzeugende des Kegels Φ, welche Doppeltangente von $f = 0$ ist, mit einer der vier Schnittgeraden des Kegels mit dem oskulierenden Kegel Ψ zusammen, so ist die der Spitze des Kegels entsprechende gerade Linie x_i Spitzentangente für einen unistationären dreifachen Punkt ε_{32} einer Komplexkurve. Die Elimination der y_i aus den sechs Gleichungen:

$$\sum c_i y_i = 0, \qquad \sum x_i y_i = 0, \qquad \sum y_i^2 = 0,$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0, \qquad D(x_i y_i) = 0,$$

in denen D die Diskriminante der Gleichung $f(\lambda) = f(x_i + \lambda y_i) = 0$ bedeutet, welche unter Voraussetzung von:

$$f = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

in den y_i und x_i bezüglich vom Grade:

$$(n-4)(n+3) \qquad \text{und} \qquad (n-4)(n-3)$$

ist, liefert nach Absonderung des Faktors:

$$\left(\sum c_i x_i\right)^{4(n-4)(n+3)}$$

eine Resultante in den x_i vom Grade:

$$4(n-4)(n+3) + 4(n-4)(n+3)(n-1) + 2(n-4)(n+3)(n-2) + 4(n-4)(n-3) - 4(n-4)(n+3) = 2(n-4)(3n^2 + 7n - 18).$$

---

[89]) Voß, l. c., S. 75.

Die Spitzentangenten der unistationären dreifachen Punkte von Komplexkurven bzw. die Wendekanten der unistationären dreifachen Ebenen von Komplexkegeln sind daher die Elemente des vollständigen Schnittes zweier Komplexe, von denen der eine der gegebene ist, und bilden demnach eine *Kongruenz vom Grade:*

$$\varepsilon_{32}\, h_{3e} = \varepsilon_{32}\, h_{3p} = 2\, n\, (n-4)\, (3\, n^2 + 7\, n - 18).$$

Natürlich bilden auch die zweiten Tangenten in den unistationären dreifachen Punkten ε_{32} eine Kongruenz. Sie ist nicht der vollständige Schnitt des gegebenen Komplexes mit einem anderen. Ihre Gradzahl beträgt:

$$\varepsilon_{32}\, h_{2e} = \varepsilon_{32}\, h_{2p} = 2\, n\, (n-4)\, (n^3 + n^2 + 9\, n - 18).$$

Endlich bilden die Strahlen x_i, für welche $f'(\lambda) = f(x_i + \lambda\, y_i) = 0$ unter Voraussetzung von $f = 0$, $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, y_i = 0$ zwei von 0 verschiedene getrennte Paare von gleichen Wurzeln hat, eine Kongruenz vom Grade:

$$\varepsilon_{222}\, h_{2e} = \varepsilon_{222}\, h_{2p} = n\, (n-4)\, (n-5)\, (n^3 + 4\, n^2 + 5\, n - 48),$$

welche ebenfalls nicht der vollständige Schnitt des gegebenen Komplexes mit einem anderen ist.

Die Ordnungszahl der von den dreifachen Punkten ε_{222} von Komplexkurven gebildeten Fläche ist gleich der Klassenzahl der von ihren Ebenen, den Trigantialebenen der von den dreifachen Punkten ausgehenden Komplexkegel, umhüllten Fläche und beträgt, wie sich wiederum dem erwähnten Clebsch'schen Theorem entnehmen läßt:

$$\varepsilon_{222}\, c^2 = \varepsilon_{222}\, \mu^2 = \tfrac{2}{3}\, n\, (n-3)\, (n-4)\, (n-5)\, (n^2 + 3\, n - 2)\ ^{90}).$$

Die Ordnungs- bzw. Klassenzahl der analogen Flächen der unistationären dreifachen Punkte ε_{32} bzw. Ebenen beträgt:

$$\varepsilon_{32}\, c^2 = \varepsilon_{32}\, \mu^2 = 2\, n\, (n-3)\, (n-4)\, (n^2 + 6\, n - 4)\ ^{91}).$$

90) Voß, l. c., S. 76 und 141.
91) Voß, l. c., S. 76 und 141.

Kapitel V.

Vollständige Aufzählung der im allgemeinen Falle möglichen Typen von Komplexkurven eines algebraischen Linienkomplexes und der einzelnen singulären Punkte bzw. Linien.

§ 1.

Die mit den Singularitäten der ersten Art verknüpften kovarianten Flächen eines Komplexes durchdringen einander in Kurven bzw. Developpablen, welche zum Teil in gesonderte Teile zerfallen. Die von den Punkten des einen Bestandteiles der Schnittkurven ausgehenden Kegel besitzen, von Wendeebenen abgesehen, zwei verschiedene Singularitäten, während die von den Punkten des anderen Bestandteiles ausgehenden Kegel eine Singularität besitzen, welche als aus der Verschmelzung der beiden erstgenannten Singularitäten hervorgegangen betrachtet werden kann. So haben z. B. die Undulationsebenen $\varepsilon_4 \mu^2$ und die unistationären Trigantialebenen $\varepsilon_{32} \mu^2$ eine aus zwei Bestandteilen bestehende Developpable miteinander gemein. Die in den Ebenen des einen Bestandteiles, welcher den Schubert'schen Tabellen zufolge von der Klasse:

$$\varepsilon_{42} \mu = 2n(n-4)(n-5)(n^3-14n^2-n-30)$$

ist, enthalten Komplexkurven, welche einen Bicuspidalpunkt besitzen, durch welchen noch ein weiterer Ast der Kurve hindurchgeht. Es entsprechen nämlich die Strahlengruppen ε_{42} denjenigen in der Fundamentalfläche $p = 0$ gelegenen geraden Linien, welche die Fläche $f = 0$ an einer Stelle vierpunktig und an einer anderen Stelle zweipunktig berühren. Gerade dieser Beschaffenheit sind aber sowohl vierpunktig als auch (3, 2)-punktig berührende Linien. Die in den Ebenen des anderen Bestandteiles gelegenen Komplexkurven haben einen Bicuspidalpunkt ε_4 und, von ihm getrennt, einen unistationären dreifachen Punkt ε_{32}. Die Klasse dieser Developpablen läßt sich auf Grund der angegebenen Zahlen $\varepsilon_4 \mu^2$, $\varepsilon_{32} \mu^2$ und $\varepsilon_{42} \mu$ natürlich auch berechnen. Man findet:

$$2n(n-4)[24n^6-124n^5+47n^4+503n^3-597n^2+169n-150].$$

Für Komplexe *fünften* Grades existiert daher wohl dieser, aber nicht der andere Bestandteil der betrachteten Flächen.

Ebenso zerfällt die gemeinsame Developpable der Ebenen, deren Komplexkurven einen dreifachen Punkt haben, und der Ebenen, deren Komplexkurven einen unistationären dreifachen Punkt besitzen, in zwei wohl unterschiedene Bestandteile. Die Ebenen des einen Bestandteiles enthalten Komplexkurven, welche einen unistationären vierfachen Punkt ε_{322} besitzen. Ihre Klasse ist nach Schubert:

$$\varepsilon_{322}\,\mu = n\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(3\,n^3+16\,n^2-5\,n-30).$$

Die Ebenen des anderen Bestandteiles enthalten Komplexkurven, welche sowohl einen gewöhnlichen als auch einen unistationären dreifachen Punkt besitzen. Auch ihre Klassenzahl läßt sich auf Grund der gegebenen Zahlen berechnen. Sie beträgt:

$$\tfrac{1}{3}\,n\,(n-4)\,(n-5)\,[8\,n^8-44\,n^7-84\,n^6+732\,n^5-413\,n^4-2170\,n^3 + 2559\,n^2-576\,n-540].$$

Natürlich stehen diesen Sätzen die ihnen dualistisch entsprechenden Sätze gegenüber.

§ 2.

Es liegen ferner auf den kovarianten Flächen gewisse ausgezeichnete Kurven bzw. Developpable. Die Doppel- und Rückkehrkurve je einer der Flächen durchdringen einander, wie die Doppel- und Rückkehrkurve der singulären Fläche, in zwei Gruppen von Punkten, welche für die eine oder die andere stationär sind [92]). Die von den Punkten der einen Gruppe ausgehenden Kegel enthalten zwei verschiedene und voneinander getrennte Singularitäten, nämlich diejenige, mit welcher ein von einem beliebigen Punkte der Fläche ausgehender Komplexkegel behaftet ist, und diejenige, welche den von einem gewöhnlichen Punkte der Rückkehrkurve ausgehenden Kegel charakterisiert. Die von den Punkten der anderen Gruppe ausgehenden Kegel enthalten Singularitäten, welche, wie früher, als aus der Verschmelzung der beiden erstgenannten Singularitäten hervorgegangen, betrachtet werden können.

So hat z. B. die Developpable derjenigen Ebenen, deren Komplexkurven zwei Bicuspidalpunkte besitzen, d. h. die Doppel-Developpable der Fläche der Undulationsebenen $\varepsilon_4\,\mu^2$, welche wir mit dem Symbol

---

[92]) Vgl. Voß, l. c., S. 74.

$\varepsilon_4 \varepsilon_4 \mu$[93]) bezeichnen wollen, mit den parabolischen Ebenen $\varepsilon_5 \mu$ derselben Fläche, deren Komplexkurven eine äußerlich wie eine gewöhnliche Spitze aussehende Hyperspitze besitzen, zwei Gruppen von Ebenen gemein. Die Ebenen der einen Gruppe sind stationäre Ebenen der Doppel-Developpablen und enthalten Komplexkurven $\varepsilon_4 \varepsilon_5$, d. h. Kurven, welche mit einem Bicuspidalpunkte ε_4 und einer von ihr getrennten Hyperspitze ε_5 behaftet sind, während die Komplexkurven der Ebenen der anderen Gruppe, welche stationäre Ebenen der parabolischen Developpablen sind, einen wie einen gewöhnlichen Kurvenpunkt aussehenden Hyper-Bicuspidalpunkt ε_6 besitzen.

§ 3.

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen und der analogen Verhältnisse auf den anderen kovarianten Flächen erhält man die in den folgenden beiden Tabellen enthaltenen $28 + 18 = 46$ Typen von Komplexkurven, welche lediglich mit reinen Singularitäten der ersten Art behaftet sind. Die erste der beiden Tabellen enthält die ursprünglich vorhandenen 28 Typen, wie sie den drei kovarianten Flächen zugeordnet sind. Sie lehrt insbesondere, daß die Punkte bzw. Ebenen ε_{422} eine der vier Gruppen der allen drei Flächen gemeinsamen Punkte bzw. Ebenen bilden. Die zweite Tabelle enthält diejenigen Typen, welche infolge von Durchdringungen der Flächen bezw. Developpablen entstehen:

I.

μ^2:	μ^1:	μ^0:
ε_4	$\varepsilon_4 \varepsilon_4$	$\varepsilon_4 \varepsilon_4 \varepsilon_4$
	ε_5	$\varepsilon_4 \varepsilon_5$, ε_6
	ε_{42}	$\varepsilon_4 \varepsilon_{42}$, ε_{52}
ε_{32}	$\varepsilon_{32} \varepsilon_{32}$	$\varepsilon_{32} \varepsilon_{32} \varepsilon_{32}$
	ε_{33}	$\varepsilon_{32} \varepsilon_{33}$, ε_{43}
	(ε_{42})	$\varepsilon_{32} \varepsilon_{42}$, ε_{422}
	(ε_{322})	$\varepsilon_{32} \varepsilon_{322}$, ε_{332}
ε_{222}	$\varepsilon_{222} \varepsilon_{222}$	$\varepsilon_{222} \varepsilon_{222} \varepsilon_{222}$
	ε_{2222}	$\varepsilon_{222} \varepsilon_{2222}$, ε_{22222}
	ε_{322}	$\varepsilon_{222} \varepsilon_{322}$, ε_{3222}

[93]) Diese Bezeichnung ist den Schubert'schen Symbolen nachgebildet, hat aber im übrigen nichts mit diesen und den zwischen ihnen bestehenden Relationen zu tun.

II.

μ^1:

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{32}$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{222}$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_4$,

μ^0:

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{222}$

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{222}$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_4\,\varepsilon_4$

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{222}$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_4\,\varepsilon_4$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}$

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{33}$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{2222}$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{42}$

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{322}$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_5$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{33}$

$\varepsilon_4\,\varepsilon_{2222}$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_5$.

Es sind demnach mit den reinen Singularitäten der ersten Art noch elf Linienflächen verbunden, die wir mit den unmittelbar verständlichen Schubert'schen Symbolen:

$\varepsilon_5\,h_5$ $\quad$ $\varepsilon_{42}\,h_4$ $\quad$ $\varepsilon_{33}\,h_3$ $\quad$ $\varepsilon_{322}\,h_3$ $\quad$ $\varepsilon_{2222}\,h_2$

$\varepsilon_{42}\,h_2$ $\quad$ $\varepsilon_{322}\,h_2$

und den ihnen nachgebildeten Symbolen:

$\varepsilon_4\,\varepsilon_4\,h_4$ $\quad$ $\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}\,h_3$ $\quad$ $\varepsilon_{222}\,\varepsilon_{222}\,h_2$

$\varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}\,h_2$

bezeichnen wollen.

§ 4.

Die zu den Singularitäten der zweiten Art gehörigen Strahlengruppen sind dadurch charakterisiert, daß sie mindestens einen Strahl enthalten, von dessen sämtlichen Punkten höchstens noch $n-2$ Tangenten an die der Ebene der Strahlengruppe angehörende Komplexkurve ausgehen.

Die mit der singulären Fläche verknüpften Komplexkurven weisen zunächst sechs verschiedene Typen auf:

μ^2:	μ^1:	μ^0:
δ	$\delta\,\delta$	$\delta\,\delta\,\delta$
	i	$\delta\,i$
		β,

wo δ eine Doppel-, i eine Wende- und β eine Selbstberührungs-Tangente bedeutet.

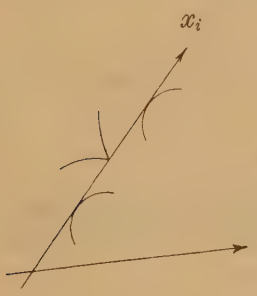
§ 5.

Durch den Schnitt der singulären Fläche mit den zu den Singularitäten der ersten Art gehörigen Flächen bzw. Developpablen ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen 20 Typen von Komplexkurven:

μ^1:	μ^0:			
$\delta\varepsilon_4$	$\delta\varepsilon_4\varepsilon_4$,	$\delta\varepsilon_{32}\varepsilon_{32}$,	$\delta\varepsilon_{222}\varepsilon_{222}$	
$\delta\varepsilon_{32}$	$\delta\varepsilon_5$,	$\delta\varepsilon_{42}$,	$\delta\varepsilon_{33}$,	$\delta\varepsilon_{322}$, $\delta\varepsilon_{2222}$
$\delta\varepsilon_{222}$	$\delta\varepsilon_4\varepsilon_{222}$,	$\delta\varepsilon_{222}\varepsilon_{32}$,	$\delta\varepsilon_{32}\varepsilon_4$	
	$\delta\delta\varepsilon_4$,	$\delta\delta\varepsilon_{32}$,	$\delta\delta\varepsilon_{222}$	
	$i\varepsilon_4$,	$i\varepsilon_{32}$,	$i\varepsilon_{222}$.	

§ 6.

Zu diesen Typen kommen noch diejenigen hinzu, welche durch Schnitte der Kongruenzen und Linienflächen miteinander entstehen. Sie enthalten unter anderen Singularitäten, welche sich vor allen anderen dadurch auszeichnen, daß ein singulärer Punkt der ersten Art auf einer singulären Linie der zweiten Art gelegen ist. Es muß nämlich, wie aus den Untersuchungen über die Kegel Φ und Ψ unmittelbar hervorgeht, wenn eine singuläre Linie zugleich singulärer Strahl einer mit den Singularitäten der ersten Art verknüpften Strahlengruppe ist, die Ebene oder der Punkt der Gruppe notwendigerweise mit der der singulären Linie zugeordneten singulären Ebene bzw. mit ihrem singulären Punkte zusammenfallen. So hat z. B. die Kongruenz $\varepsilon_{32}\, h_2$, d. h. die Kongruenz der gewöhnlichen Tangenten der unistationären dreifachen Punkte von Komplexkurven, mit der Kongruenz der singulären Linien eine aus zwei Bestandteilen gleichen Grades bestehende Linienfläche gemein. Die



(oder dual)

den Erzeugenden des einen Bestandteiles zugeordneten singulären Ebenen enthalten Komplexkurven, auf deren Doppeltangente eine Spitze der Kurve liegt, deren Spitzentangente nicht mit der singulären Linie koinzidiert: $(\delta\varepsilon_3)$ möge eine solche Singularität bezeichnet werden. Die Schnitte von

Kongruenzen und Linienflächen, welche lediglich mit Singularitäten der ersten Art verknüpft sind, ergeben ersichtlich nur dann neue Typen von Komplexkurven oder Kegeln, wenn die in Frage stehenden Linien gleichzeitig der Kongruenz der singulären Linien angehören. Es ist dies eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung. So hat z. B. die Kongruenz der Undulationskanten bzw. Bicuspidalpunktstangenten mit der Linienfläche der Wendetangenten von Komlexkurven:

$$\tfrac{1}{2}\,32\,n\,(n-1)\,(2\,n-3)\,(11\,n-18)$$

Linien gemein. Aber diese Linien zerfallen in drei Gruppen. Zum Teil sind sie Wendetangenten von Komplexkurven und gleichzeitig Undulationskanten der von den singulären Punkten der Wendetangenten ausgehenden Komplexkegel, zum Teil sind sie Schnabelspitzentangenten und gleichzeitig Undulationskanten für die von den (nichtsingulären) Schnabelpunkten ausgehenden Komplexkegel. Endlich befinden sich unter ihnen auch die β Selbstberührungstangenten von Komplexkurven, welche gleichzeitig Undulationskanten für die von den (nichtsingulären) Selbstberührungspunkten ausgehenden Komplexkegel sind. Unter Berücksichtigung dieser und analoger Verhältnisse erhält man lediglich durch Betrachtung von Durchdringungen von Kongruenzen und Linienflächen die in der folgenden Tabelle enthaltenen 25 Typen:

μ^1:

$$\delta_3\,\varepsilon_3, \qquad \delta_2\,\varepsilon_{22}, \qquad (\delta\,\varepsilon_3), \qquad (\delta\,\varepsilon_{22})$$

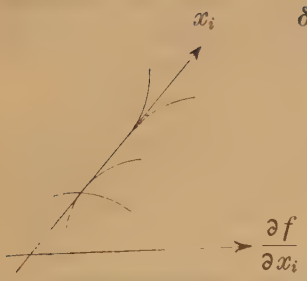
μ^0:

$$\delta_{33}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3, \quad \delta_{22}\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{22}, \quad (\delta\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3), \quad (\delta\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{22})$$
$$(\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{22}), \quad \delta_{32}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{22}, \quad (\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3)$$
$$(\delta_2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_3), \quad (\delta\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_3), \quad (\delta_2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_3)$$
$$i_3\,\varepsilon_3, \qquad i_2\,\varepsilon_{22}, \qquad (i\,\varepsilon_3), \qquad (i\,\varepsilon_{22})$$
$$\delta_4\,\varepsilon_4, \quad \delta_2\,\varepsilon_{23}, \quad \delta_{3\,32}, \quad \delta_2\,\varepsilon_{222}, \quad (\delta\,\varepsilon_4), \quad (\delta\,\varepsilon_{32}), \quad \delta\,\varepsilon_{222}).$$

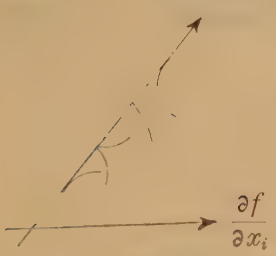
§ 7.

Zum besseren Verständnis der in der letzten und den nächsten Tabellen verwandten Symbolik mögen einige Beispiele zur Erläuterung dienen.

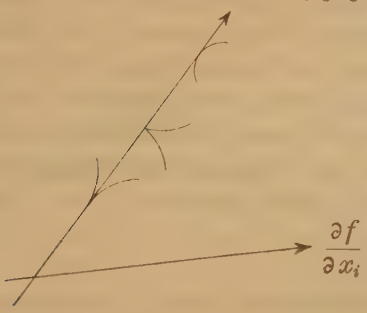
Es bedeutet:



$\delta_{32}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{22}$, daß die Doppeltangente δ sowohl Spitzen- als auch Doppelpunktstangente der zugehörigen Komplexkurve ist;

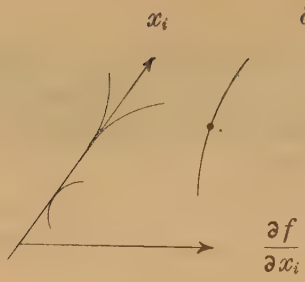


$(\delta\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{22})$, daß auf der Doppeltangente δ ein Rückkehrpunkt und ein Doppelpunkt der zugehörigen Komplexkurve in allgemeiner Lage liegen;

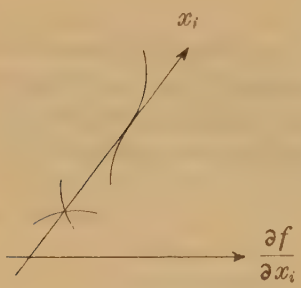


$(\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3)$, daß der eine der beiden Berührungspunkte der Doppeltangente δ mit der Komplexkurve ein Rückkehrpunkt derselben ist und daß überdies ein weiterer Rückkehrpunkt der Komplexkurve in allgemeiner Lage auf ihr liegt;

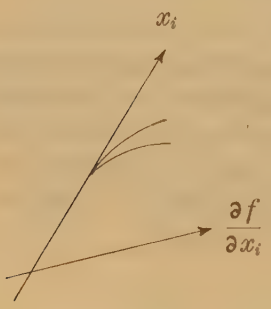
$(\delta\,\varepsilon_{22})\,\varepsilon_{222}$, daß auf der Doppeltangente δ ein Doppelpunkt der zugehörigen Komplexkurve in allgemeiner Lage und überdies in ihrer Ebene noch ein dreifacher Punkt derselben liegen;



$\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4$, daß δ zugleich Spitzentangente ist, und überdies noch ein Bicuspidalpunkt in der Ebene der Kurve liegt;



$(i\,\varepsilon_{22})$, daß auf der Wendetangente i ein ihrer Kurve angehörender Doppelpunkt in allgemeiner Lage liegt;



$i_3\,\varepsilon_3$, daß eine Wendetangente i gleichzeitig Spitzentangente der zugehörigen Komplexkurve ist, was nach den Untersuchungen über die Kegel Φ und Ψ nur dadurch möglich ist, daß der Rückkehrpunkt mit dem Wendepunkte koinzidiert. Ein solcher Punkt ist aber eine Schnabelspitze.

Auf Grund dieser Beispiele können alle Symbole interpretiert werden.

§ 8.

Es ergeben sich endlich durch weitere Durchdringung der Ebenen der in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhandenen Typen der letzten Tabelle mit den Ebenen der übrigen kovarianten Flächen des Komplexes die in der folgenden Tabelle aufgezählten, in diskreter Anzahl vorhandenen 16 Typen von Komplexkurven:

$\delta_3\,\varepsilon_3\,\delta$, $\delta_2\,\varepsilon_{22}\,\delta$, $(\delta\,\varepsilon_3)\,\delta$, $(\delta\,\varepsilon_{22})\,\delta$,

$\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4$, $[\delta_2\,\varepsilon_{22}]\,\varepsilon_{32}$, $(\delta\,\varepsilon_{22})\,\varepsilon_4$, $(\delta\,\varepsilon_{22})\,\varepsilon_{32}$,

$[\delta_3\,\varepsilon_3]\,\varepsilon_{32}$, $\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{222}$, $(\delta\,\varepsilon_{22})\,\varepsilon_{222}$, $(\delta\,\varepsilon_3)\,\varepsilon_{32}$,

$\delta_2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_4$, $[\delta_2\,\varepsilon_{22}]\,\varepsilon_{222}$, $(\delta\,\varepsilon_3)\,\varepsilon_4$, $(\delta\,\varepsilon_3)\,\varepsilon_{222}$,

wo die eckigen Klammern lediglich den Zweck haben, falsche Indices-Kombinationen zu verhüten.

§ 9.

Ein algebraischer Linienkomplex enthält daher im allgemeinen 113 voneinander verschiedene Typen von Komplexkurven und dual ebensoviele voneinander verschiedene Typen von Komplexkegeln. Von diesen sind:

a) lediglich mit reinen Singularitäten der ersten Art behaftet	$28 + 18 = 46$
b) lediglich mit Singularitäten der zweiten Art (von Rückkehr- und Doppelpunkten in allgemeiner Lage abgesehen) behaftet	6
c) Mischtypen	$20 + 25 + 16 = 61$
	s. s. $= 113$

§ 10.

Scheidet man in den gegebenen sechs Tabellen die einzelnen singulären Elemente von den Singularitäten-Konglomeraten, wobei beispielsweise ein $\delta_2\,\varepsilon_{22}$, d. h. eine Doppeltangente, welche zugleich für einen ihrer Berührungspunkte mit der Komplexkurve Doppelpunktstangente ist, als besonderes singuläres Element anzusehen ist, während ein $(\delta\,\varepsilon_{22})$, d. h. eine Doppeltangente, auf welcher ein der betreffenden Kurve angehörender Doppelpunkt in allgemeiner Lage liegt, als Konglomerat mehrerer Singularitäten zu betrachten ist, und stellt die einzelnen singulären Elemente für sich zusammen, so ergeben sich unter Hinzufügung der in dreifacher Mannigfaltigkeit vorhandenen Elemente ε_3 und ε_{22} die in der folgenden Tabelle enthaltenen *31 Typen verschiedener einzelner Singularitäten:*

∞^3:	∞^2:	∞^1:	∞^0:
ε_2	ε_4	ε_5	ε_6
ε_{22}	ε_{32}	ε_{42}	ε_{52}
	ε_{222}	ε_{33}	ε_{43}
	δ	ε_{322}	ε_{422}
		ε_{2222}	ε_{332}
		i	ε_{3222}
		$\delta_3\,\varepsilon_3$	ε_{22222}
		$\delta_2\,\varepsilon_{22}$	β
			$i_3\,\varepsilon_3$
			$i_2\,\varepsilon_{22}$
			$\delta_4\,\varepsilon_4$
			$\delta_3\,\varepsilon_{32}$
			$\delta_2\,\varepsilon_{32}$
			$\delta_2\,\varepsilon_{222}$
			$\delta_{33}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3$
			$\delta_{32}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_{22}$
			$\delta_{22}\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{22}$

Wie man sieht, hätte man auf Grund der hier verwandten Symbolik[94]) diese letzte Tabelle a priori hinschreiben können. Sie enthält nämlich gerade die auf die reinen Singularitäten der ersten Art bezüglichen 17 Symbole des Schubert'schen[95]) Stammbaumes, die Singularitäten der zweiten Art δ, i und β und die nach Form und Stufe möglichen Kombinationen beider untereinander. Man kann daher in der letzten Tabelle gleichzeitig eine Kontrolle der früheren Aufzählungen erblicken.

§ 11.

Die Tabellen enthalten naturgemäß eine Reihe von Sätzen. Wir geben einige in Worten, weil sie geeignet zu sein scheinen, auf die Entstehung der Tabellen einiges Licht zurückzuwerfen. Außerdem sollen noch einige den algebraischen Methoden zugängliche Zahlen abgeleitet werden.

1. Die singuläre Fläche durchdringt die Flächen der Bicuspidalpunkte und der gewöhnlichen dreifachen Punkte in Kurven, welche je in zwei rational getrennte Bestandteile zerfallen, die Fläche der unistationären dreifachen Punkte in einer aus drei gesonderten Bestandteilen bestehenden Kurve. Von den Punkten des einen Bestandteiles gehen Komplexkegel aus, welche eine Doppelkante und außerdem die der betreffenden Fläche zugeordnete Singularität besitzen. Die von den Punkten des anderen bzw. der beiden anderen

[94]) Dabei ist freilich zu beachten, daß z. B. ein $\delta_{33}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3$ etwas ganz anderes ist als ein $(\delta_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3)$ u. s. w.

[95]) l. c. (Mathem. Ann., Bd. XII), S. 117.

Bestandteile ausgehenden Kegel enthalten, von Wende- und Bitangentialebenen in allgemeiner Lage natürlich abgesehen, nur eine einzige Singularität, welche als aus der Verschmelzung der erstgenannten Singularitäten hervorgegangen betrachtet werden kann. Diese zweiten Bestandteile der Durchdringungskurven sind gleichzeitig Teile der Kurven der singulären Punkte, welche den gemeinsamen Erzeugenden der Kongruenz der singulären Linien und der vier mit den Singularitäten der ersten Art verknüpften Kongruenzen zugeordnet sind. Von den Punkten der zweiten Bestandteile der Berührungskurven der singulären Fläche mit den vier eben erwähnten Linienflächen gehen Komplexkegel aus, welche nur eine Doppelkante besitzen. Aber die dieser Doppelkante zugeordnete singuläre Ebene enthält eine Komplexkurve, welche diejenige Singularität besitzt, die der Singularität des von dem ergänzenden Bestandteile ausgehenden Komplexkegels dualistisch entspricht.

2. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen. Die singulären Ebenen haben mit den Ebenen der Bicuspidalpunkte eine aus zwei Bestandteilen bestehende Developpable gemein. Die Ebenen des ersten Bestandteiles enthalten Komplexkurven mit einer Doppeltangente und einem in allgemeiner Lage befindlichen Bicuspidalpunkte. Bei den Komplexkurven des zweiten Bestandteiles hingegen koinzidiert die Bicuspidalpunktstangente mit der Doppeltangente, was früheren Ausführungen zufolge nur dadurch möglich ist, daß der Bicuspidalpunkt mit einem der beiden Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenfällt, d. h. daß die Doppeltangente für einen ihrer Berührungspunkte mit der Komplexkurve Spitzentangente derselben ist. Dieser zweite Bestandteil der den singulären und Undulationsebenen gemeinsamen Developpablen ist gleichzeitig ein Teil derjenigen Developpablen von der Klasse:

$$8\,n\,(n-1)\,(11\,n-18)\,\frac{n}{2},$$

deren Elemente den gemeinsamen Erzeugenden der Kongruenz der singulären Linien und der Kongruenz der Undulationskanten als singuläre Ebenen zugeordnet sind. Denn die Linienfläche der Doppeltangenten von Komplexkurven, welche gleichzeitig Spitzentangenten der zugehörigen Kurve sind, wird aus der Kongruenz der singulären Linien zusammen mit der ihr dualistisch entsprechenden Linienfläche

gleichen Grades durch die Kongruenz der Undulationskanten bzw. Bicuspidalpunktstangenten ausgeschnitten. Ihr Grad ist daher:

$$\tfrac{1}{2}\,8\,n\,(n-1)\,(11\,n-18).$$

Sie enthält zugleich mit der ihr dualistisch entsprechenden Linienfläche vermöge der Gleichungen:

$$p=0, \qquad f=0, \qquad F=0$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} = 0$$

$$4\,n\,(n-1)\,(3\,n-4)\,(4\,n-6)$$

ausgezeichnete Erzeugende. *Die die singuläre Fläche vierpunktig berührenden singulären Komplexstrahlen gehören daher gleichzeitig der Kongruenz der Undulationskanten an.* Ihre Berührungspunkte mit der singulären Fläche sind gemeinsame Punkte der Durchschnittskurve der singulären Fläche mit der Fläche der Bicuspidalpunkte von Komplexkurven sowie der Berührungskurve der singulären mit der akzessorischen Fläche[96]) und gehören endlich der Kurve der vierpunktigen Berührung der singulären Fläche an.

3. Die Linien der vier Gruppen:

$$\delta_{33}\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3, \qquad \delta_{22}\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{22}, \qquad (\delta\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3), \qquad (\delta\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{22})$$

sind bezüglich Torsallinien der vier Regelflächen:

$$\varepsilon_4\,\varepsilon_4\,h_4, \qquad \varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}\,h_3, \qquad \varepsilon_{32}\,\varepsilon_{32}\,h_2, \qquad \varepsilon_{222}\,\varepsilon_{222}\,h_2.$$

Sie gehören der Kongruenz der singulären Linien an und zählen bezüglich für die Kongruenzen der Undulationskanten, der Spitzentangenten der unistationären dreifachen Punkte, der gewöhnlichen Tangenten der unistationären dreifachen Punkte und der Tangenten der gewöhnlichen dreifachen Punkte von Komplexkurven doppelt.

4. Die Linienfläche der Doppeltangenten von Komplexkurven, welche gleichzeitig Doppelpunktstangenten der betreffenden Kurve sind, d. h. der Doppeltangenten, deren einer Berührungspunkt mit der Komplexkurve gleichzeitig Doppelpunkt derselben ist, wird in

[96]) Kap. III, § 8 vorliegender Arbeit.

Verbindung mit der ihr dualistisch entsprechenden Linienfläche aus der Kongruenz der singulären Linien durch die Kongruenz der Spitzentangenten der unistationären dreifachen Punkte ausgeschnitten. Ihr Grad beträgt daher, wie sich aus den früheren[97]) Ableitungen ergibt:

$$\tfrac{1}{2}\,8\,n\,(n-1)\,(n-4)\,(3\,n^2+7\,n-18).$$

Den Auflösungen der Gleichungen:

$$p=0, \qquad f=0 \qquad F=0, \qquad \Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}=0, \qquad D=0$$

entsprechend, in denen D die Diskriminante der Gleichung:

$$f(\lambda)\equiv f\left(x_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=0$$

vorstellt, welche unter Voraussetzung von

$$f=0, \qquad F=0, \qquad \Sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

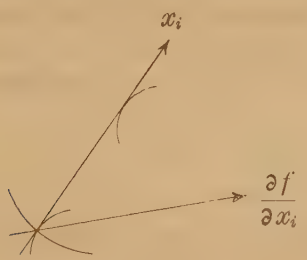
eine homogene Funktion der x_i vom Grade:

$$(n-4)\,[(4\,n-6)+n\,(n-1)]$$

ist, enthalten die beiden soeben betrachteten einander dualistisch entsprechenden Linienflächen:

$$4\,n\,(n-1)\,(n-4)\,(3\,n-4)\,(n^2+3\,n-6)$$

gemeinsame Erzeugende von der Beschaffenheit, daß die ihnen zugeordneten singulären Punkte und Ebenen mit den Doppelpunkten bzw. Bitangentialebenen koinzidieren:



(und dual)

[97]) Kap. IV, § 3.

§ 12.

Es sei endlich gestattet, noch zwei spezielle merkwürdige und den algebraischen Methoden bislang unzugängliche Zahlen anzuführen. Entsprechend der Zahl $\varepsilon_5 h_5$ der Schubert'schen Tabellen enthält der Komplex *vierten* Grades im allgemeinen 1280 Büschel, deren Scheitel und Ebenen natürlich nicht singulär sind. Und der ebendort befindlichen Zahl ε_{22222} zufolge besitzt der allgemeine Komplex *zehnten* Grades, für welchen diese Singularität naturgemäß zuerst auftreten kann, 3164800 Komplexkurven mit fünffachem Punkte.

Kapitel VI.

Über konfokale oder konsinguläre Komplexe.

§ 1.

Die Punkte x_i der Schnittkurve f der Fundamentalfläche $p = 0$ mit der einen Linienkomplex n^{ten} Grades definierenden vierdimensionalen Fläche $f = 0$, welchen die singulären Strahlen des betreffenden Komplexes entsprechen, sind dadurch ausgezeichnet, daß die in ihnen an $f = 0$ gelegten Tangentialebenen gleichzeitig $p = 0$ (in einem anderen Punkte) tangieren. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind, wenn die Gleichung der Fundamentalfläche $p = 0$ in der Form:

$$\sum_1^6{}_i x_i^2 = 0$$

gegeben ist, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Den Verbindungsgeraden der beiden Berührungspunkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dieser Ebenen mit $f = 0$ und $p = 0$ entsprechen die ∞^2 Tangentenbüschel: $x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ der singulären Fläche des Komplexes.

Es seien nun:

$$\pi(u_i) \equiv \sum_1^6{}_i u_i^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi(u_i) = 0 \tag{1}$$

bezüglich die Gleichungen der Flächen $p = \sum_1^6{}_i x_i^2 = 0$ und $f = 0$

in Ebenenkoordinaten u_i. Alsdann lautet die Gleichung der Flächenschar, welche der gemeinsamen „Developpablen“ von $\pi = 0$ und $\varphi = 0$ einbeschrieben sind:

$$\Phi(u_i) = \varphi(u_i) + \psi(u_i) \sum_1^6{}_i u_i^2 = 0. \tag{2}$$

In dieser Gleichung bedeutet ψ eine willkürliche homogene Funktion der u_i, deren Grad um zwei Einheiten geringer ist als derjenige von φ, welcher im allgemeinen also:

$$n(n-1)^4 - 2$$

beträgt. Nun ist, wenn $f(x_i) = 0$ und $\varphi(u_i) = 0$ die Gleichungen einer und derselben Fläche in Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \varrho u_i \\ \sum_1^6{}_i u_i x_i &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Umgekehrt ist aber auch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} &= \sigma x_i \\ \sum_1^6{}_i x_i u_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bildet man die Gleichung (2) und stellt sie in Punktkoordinaten x'^i her:

$$\Phi(u_i) = 0 \equiv F(x'_i) = 0, \tag{5}$$

so ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \tau x'_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + 2 u_i \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \sum u_i^2$$

oder wegen:

$$\sum u_i^2 = 0$$

nach (3):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \tau x'_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \frac{2\psi}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und nach (4):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \tau x'_i = \sigma x_i + \frac{2\psi}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{I}$$

Dies gibt den Satz[98]):

Die Berührungspunkte x'_i einer beliebigen Fläche der Schar $F(x_i) = 0$ mit einer beliebigen gemeinsamen Tangentialebene der Flächen $f = 0$ und $\sum x_i^2 = 0$ liegen auf der Verbindungsgeraden ihrer Berührungspunkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ mit der Tangentialebene.

Es ist anderseits, wenn $F(x_i) = 0$ die Gleichung der Fläche $\Phi = 0$ in Punktkoordinaten vorstellt, nach (3):

$$\frac{\partial F}{\partial x'_i} = \varrho' u_i = \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad \text{(II)}$$

Beachtet man nun:

1. daß nach (I) im allgemeinen jeder gemeinsamen Tangentialebene der Flächen $f = 0$ und $\sum x_i^2 = 0$ eine und nur eine gerade Linie $P P_0$ zugeordnet ist, nämlich die Verbindungsgerade der Berührungspunkte $P \equiv x_i$ und $P_0 \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ der Ebene mit den beiden Flächen;

2. daß die Berührungspunkte $P' \equiv x'_i$ einer den Flächen (1) gemeinsamen festen Ebene mit sämtlichen Individuen der Flächenschar (2) die gerade Linie $P P_0$ erfüllen;

3. daß $P P_0$ die Fundamentalfläche $\sum u_i^2 = 0 \equiv \sum x_i^2 = 0$ im Punkte P_0 tangiert und also keinen weiteren Punkt P' mit ihr gemein haben kann, außer wenn sie ganz in der Fundamentalfläche gelegen ist;

4. daß in letzterem Falle und nur in diesem dem Punkte P und sämtlichen Punkten P' singuläre Strahlen p und p' der betreffenden Komplexe entsprechen, während nach (II) dem Punkte P_0 der allen Strahlen p' gemeinsam zugeordnete Strahl p_0 entspricht;

---

[98]) Es gilt natürlich ganz allgemein im Raume von beliebig vielen Dimensionen und für Flächen beliebiger Ordnung der Satz: Die Berührungspunkte der Individuen einer Flächenschar:

$$F(x_i) = 0 \equiv \Phi(u_i) = \varphi(u_i) + \psi(u_i)\,\chi(u_i) = 0$$

mit einer beliebigen festen gemeinsamen Tangentialebene u_i der Flächen $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ erfüllen die Verbindungsgerade:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \right) v_i = 0$$

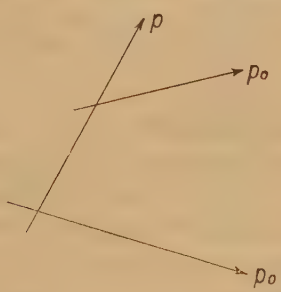
der Berührungspunkte der Ebene u_i mit $\varphi = 0$ und $\chi = 0$. (Vgl. Kapitel II, § 1 vorliegender Arbeit.)

5. daß endlich die Strahlenbüschel $(p\,p_0)$ die singuläre Fläche konstituieren, so ergibt sich der Satz:

Alle Flächen der Schar (2), *betrachtet als Örter von Punkten, schneiden aus der Fundamentalfläche* $p = 0$ *dreidimensionale Kurven aus, deren Punkten die Strahlen von Linienkomplexen entsprechen, welche die singuläre Fläche des Komplexes* $f = 0$ *zur gemeinsamen singulären Fläche haben*[99]).

§ 2.

Unter den Flächen der Schar (2) werden sich auch solche befinden, welche in dreidimensionale Kurven degeneriert sind. Durch eine beliebige dreidimensionale Tangente einer solchen Kurve lassen sich zwei die Fundamentalfläche $p = 0$ berührende Ebenen legen, welche im allgemeinen natürlich nicht koinzidieren, und daher zwei voneinander verschiedene Berührungspunkte der betreffenden Linie p mit der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$ bestimmen. Sie sind durch die den beiden Punkten P_0 entsprechenden Strahlen p_0 gegeben:



Das gibt den Satz:

Die in der Flächenschar (2) *enthaltenen „Kurven" durchdringen, als Örter von Punkten betrachtet, die Fundamentalfläche* $p = 0$ *in zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, welchen in der Liniengeometrie Kongruenzen entsprechen, deren Erzeugende Doppeltangenten der singulären Fläche des Komplexes* $f = 0$ *sind, für welche also die singuläre Fläche Brennfläche ist.*

---

[99]) Dieser Satz subsumiert ein Theorem, das von Herrn Klein (Mathem. Ann., Bd. V, S. 273) in Gestalt des folgenden, für einen speziellen Fall von Lie (ibidem, S. 234) bewiesenen Satzes ausgesprochen worden ist: Komplexe eines (einfach-unendlichen) irreduciblen Involutionssystems (orthogonale Flächensysteme im gewöhnlichen Raume) haben eine gemeinsame Singularitätenfläche.

Läßt sich die Kurve C, welche in der Flächenschar (2) enthalten ist, als der vollständige Schnitt zweier Flächen:

$$f'(x_i) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_i) = 0$$

darstellen, so sind die durch C bestimmten Doppeltangenten der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$ durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$p = 0, \qquad f' = 0, \qquad f'' = 0, \tag{6}$$

während die beiden Berührungspunkte mit der singulären Fläche auf der Doppeltangente x_i durch die beiden Linien:

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f''}{\partial x_i}; \qquad \frac{\partial f'}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f''}{\partial x_i}$$

ausgeschnitten werden, welche den Berührungspunkten der Fundamentalfläche mit den beiden Ebenen entsprechen, die sich in dem Tangentialebenenbüschel der Kurve C im Punkte x_i befinden, wo also λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\Sigma \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f''}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \tag{7}$$

bedeuten.

Die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente mit der singulären Fläche fallen zusammen, d. h. p ist *vierpunktige* Tangente der singulären Fläche, wenn die beiden durch die betreffende Tangente der Kurve C gelegten Tangentialebenen der Fundamentalfläche koinzidieren. Die Bedingung hiefür besteht in dem Verschwinden der Diskriminante der Gleichung (7). Die *singulären Strahlen*[100]) der Doppeltangentenkongruenzen $C \equiv (f' = 0;\ f'' = 0)$, d. h. diejenigen ihrer Erzeugenden, welche die singuläre Fläche des Komplexes $f = 0$, die Brennfläche der Kongruenzen, vierpunktig berühren, sind daher durch die folgenden Gleichungen[101]) gegeben:

$$p = 0, \qquad f' = 0, \qquad f'' = 0, \qquad D = 0, \tag{8}$$

wo D die Diskriminante der für λ quadratischen Gleichung (7) bedeutet.

---

[100]) Vgl. wegen dieser Bezeichnung Sturm, l. c., Bd. III, S. 53 und Segre, l. c., S. 125.

[101]) Diese Gleichungen bestehen allgemein für die „singulären Strahlen" einer Kongruenz ($f' = 0;\ f'' = 0$). — Vgl. Voß, l. c., S. 82 ff.

Ist die eine der beiden Flächen $f' = 0$ und $f'' = 0$, etwa $f' = 0$, eine Ebene, so darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, die Kurve C sei der Schnitt der Ebene $x_1 = 0$ mit dem Kegel erster Spezies:

$$f^0(x_2 : x_3 : \cdots x_6) = 0.$$

Alsdann nimmt die Bedingung $D = 0$ eine einfache und merkwürdige Form an:

$$\Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{9}$$

Man erhält dieselbe nicht unmittelbar. Es kann jedoch die Kurve $C = (x_1 = 0,\ f^0 = 0)$ unter Voraussetzung von $x_1 = 0$ auch durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f' &= f^0(x_2 \cdots x_6) + x_1 A(x_2 \cdots x_6) = 0 \\ f'' &= f^0(x_2 \cdots x_6) + x_1 B(x_2 \cdots x_6) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

dargestellt werden, in welchen A und B beliebige homogene Funktionen der Veränderlichen $x_2 \cdots x_6$ bedeuten, deren Grad um eine Einheit geringer ist als derjenige von $f^0 = 0$. Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f'}{\partial x_1} = A \quad ; && \frac{\partial f''}{\partial x_1} = B \\
&\frac{\partial f'}{\partial x_2} = \frac{\partial f^0}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial A}{\partial x_2}; && \frac{\partial f''}{\partial x_2} = \frac{\partial f^0}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial B}{\partial x_2} \\
&\qquad = \frac{\partial f^0}{\partial x_2} + 0 \quad ; && \qquad = \frac{\partial f^0}{\partial x_2} + 0 \\
&\cdots \quad ; && \cdots \\
&\cdots \quad ; && \cdots \\
&\frac{\partial f'}{\partial x_6} = \frac{\partial f^0}{\partial x_6} + x_1 \frac{\partial A}{\partial x_6}; && \frac{\partial f''}{\partial x_6} = \frac{\partial f^0}{\partial x_6} + x_1 \frac{\partial B}{\partial x_6} \\
&\qquad = \frac{\partial f^0}{\partial x_6} + 0 \quad ; && \qquad = \frac{\partial f^0}{\partial x_6} + 0
\end{aligned}$$

und mithin:

$$\Sigma \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f''}{\partial x_i}\right)^2 = (A + \lambda B)^2 + (1 + \lambda)^2 \Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2$$

$$= \lambda^2 \left[B^2 + \Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right] + 2\lambda \left[AB + \Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right] + \left[A^2 + \Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right].$$

Daraus folgt aber:

$$D = \left(B^2 + \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right)\left(A^2 + \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right) - \left(AB + \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2\right)^2$$
$$= (A-B)^2 \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

da $A - B$ nicht verschwindet.

Die Gleichung (9) besagt aber anderseits, daß die in einem Punkte P der Flächen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x_i^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ f^0 &= 0 \\ \Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

an $f^0 = 0$ gelegte Tangentialebene die Fundamentalfläche $\sum x_i^2 = 0$ tangiert, daß mithin der Punkt P für den Komplex $f^0 = 0$ singuläre Linie ist. Die adjungierte Linie von $p \equiv x_i$ entspricht dem Berührungspunkte P_0 der Tangentialebene, welcher die Koordinaten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ hat. Da $f^0 = 0$ die Veränderliche x_1 überhaupt nicht enthält, so ist $\frac{\partial f^0}{\partial x_1} = 0$, d. h. der Berührungspunkt P_0 liegt wieder in der Ebene $x_1 = 0$, und damit auch die Verbindungsgerade der Punkte $P \equiv x_i$ und $P_0 \equiv \frac{\partial f^0}{\partial x_i}$. Die Büschel $\left(x_i, \frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)$, welche die Berührungspunkte und Ebenen der vierpunktigen Tangenten der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$ bestimmen, gehören daher dem linearen Komplex $x_1 = 0$ vollständig an. Die Tangentialebenen zweier konsekutiver dieser Punkte $\left(x_i, \frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)$ der singulären Fläche haben daher die Verbindungslinien derselben, wegen der zwischen den Punkten und Ebenen einer speziellen linearen Kongruenz bestehenden Projektivität, zur Schnittgeraden, d. h. die Kurve der Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten mit der singulären Fläche ist unter den angegebenen Voraussetzungen eine Haupttangentenkurve[102]). Das gibt den Satz:

---

[102]) Vgl. Anm. 101. — Ferner: Voß, l. c., S. 106 und Lie, Mathem. Ann. V, S. 178.

Wenn in der Flächenschar (2) *in ebene Kurven degenerierte Individuen enthalten sind, so besitzt die singuläre Fläche des Komplexes* $f = 0$ *ihrer Anzahl entsprechend viele ausgezeichnete Haupttangentenkurven, welche Bestandteile der Kurve der vierpunktigen Berührung sind.*

Eine solche Haupttangentenkurve ist gemeinsamer Berührungsschnitt[103]) der singulären Flächen der Schar von Komplexen (2) und der sämtlichen singulären Flächen der Komplexe:

$$f' = f^0 + x_1^2 A(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6),$$

wo A eine willkürliche homogene Funktion der Veränderlichen x_i bedeutet, deren Grad um zwei Einheiten geringer ist, als derjenige von $f^0 = 0$. Denn die Gleichung:

$$\Sigma \left(\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

bestimmt alsdann sämtliche dem linearen Komplex $x_1 = 0$ angehörenden singulären Strahlen der Komplexe $f' = 0$, und die diesen zugeordneten Linien $\frac{\partial f'}{\partial x_i}$ sind mit den $\frac{\partial f^0}{\partial x_i}$ identisch. Natürlich ist die Haupttangentenkurve als Berührungskurve der singulären Flächen der Komplexe $f' = 0$ mit der singulären Fläche von $f = 0$ für sämtliche Flächen Haupttangentenkurve.

§ 3.

Wir gehen nunmehr dazu über, die allgemeinen Sätze der vorigen Paragraphen auf die Komplexe *zweiten* Grades anzuwenden, woraus sich insbesondere eine analytische Darstellung der 96 in den Knotenpunkten der Kummer'schen Fläche hyperoskulierenden geraden Linien ergibt.

Die Gleichung $\varphi(u_i) = 0$ einer Fläche in Ebenenkoordinaten erhält man aus ihrer Gleichung $f(x_i) = 0$ in Punktkoordinaten durch Elimination der x_i und ϱ aus den sieben Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho\, u_i$$

$$\sum_1^6{}^i u_i x_i = 0.$$

[103]) Natürlich nicht immer vollständiger Schnitt.

Ist die Fläche zweiten Grades $f = 0$, welche die einem allgemeinen Komplex zweiten Grades zugeordnete Kurve f' aus der Fundamentalfläche $p = 0 \equiv \sum x_i^2 = 0$ ausschneidet, auf das dem Büschel:

$$f - \lambda p = 0$$

gemeinsame Polar-Hexagon bezogen, so kann ihre Gleichung unter zu Grundelegung der Form:

$$p \equiv \sum x_i^2 = 0$$

in der Form:

$$f \equiv \sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0$$

geschrieben werden. Ihre Gleichung in Ebenenkoordinaten u_i lautet alsdann:

$$\sum a_i u_i^2 = 0.$$

Die Gleichung der dem Komplex $f = 0$ konfokalen Schar ist daher in den Veränderlichen u_i:

$$\sum (a_i - \mu) u_i^2 = 0 \qquad (1)$$

woraus sich unmittelbar:

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \mu} = 0$$

als Gleichung in den Veränderlichen x_i ergibt.

Die konfokalen Komplexe zweiten Grades bilden daher ein Büschel[104]).

Den sechs in der Flächenschar (1) enthaltenen „Kegelschnitten“: $\mu = a_i$ sind sechs Kongruenzen von der zweiten Ordnung und Klasse zugeordnet, deren Erzeugende *Doppeltangenten der singulären Fläche* des Komplexbüschels (1) sind. Sie sind durch die sechs Systeme von Gleichungen[105]) gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \sum x_i^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

---

[104]) Wie auf einem ganz anderen Wege zuerst von F. Klein (Mathem. Ann., Bd. II, S. 224) bewiesen worden ist. — Vgl. ferner: Voß, l. c., S. 152 und Segre, l. c., p. 82 und 114 ff.

[105]) Vgl. Klein, Mathem. Ann., Bd. II, S. 225.

und zwar bilden diese sechs Kongruenzen die Gesamtheit der Doppeltangenten der singulären Fläche des Komplexes $f = 0$, welche nicht in ihren 16 Doppelebenen[106]) gelegen sind. Denn es ergibt sich aus der Pluecker'schen Formel:

$$N = S(S-1) - 2\delta - 3J,$$

in welcher den früheren Ableitungen zufolge:

$$N = 4, \quad S = 12, \quad J = 24$$

zu setzen ist:

$$\delta = 28 = 6 \cdot 2 + 16.$$

Die Koordinaten der singulären Strahlen dieser Kongruenzen, d. h. derjenigen, welche die singuläre Fläche vierpunktig berühren, haben, wie sich aus den Gleichungen (8) und (9) des vorigen Paragraphen ergibt, den folgenden sechs Systemen von Gleichungen zu genügen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x_i^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1} &= 0 \\ \frac{x_2^2}{(a_2 - a_1)^2} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1)^2} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1)^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Die *vierpunktig und vierebenig berührenden Tangenten der singulären Fläche,* welche, wie wir gesehen haben[107]), keinem allgemeinen Komplex zweiten Grades als singuläre Strahlen angehören können, bilden daher sechs Regelflächen achten Grades, welche in Verbindung mit den Tangenten der 16 Kegelschnitte der Doppelebenen, aus welchen die parabolische Kurve (der 32. Ordnung und 0. Klasse früheren Ausführungen zufolge) besteht, die vollständige Linienfläche der vierpunktigen Tangenten der Kummer'schen Fläche ausmachen. Denn ihre Gradzahl beträgt:

$$6 \cdot 8 + 16 \cdot 2 = 80 = [3N(N-3)(3N-2)]_{(N=4)}.$$

Die Kurve der Berührungspunkte der singulären Strahlen einer jeden der sechs Doppeltangentenkongruenzen ist, wie sich aus einem

---

[106]) Siehe Anm. 110.

[107]) Kap. II, § 3 vorliegender Arbeit.

früher gegebenen allgemeinen Theorem[108]) in Verbindung mit den folgenden Ausführungen unmittelbar ergibt, vom Grade:

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 8.$$

Jede dieser ausgezeichneten sechs Hauptangentenkurven kann daher als der vollständige Berührungsschnitt zweier allgemeiner Kummer'scher Flächen (der vierten Ordnung und Klasse) dargestellt werden, und zwar ist jede für beide ausgezeichnete Hauptangentenkurve. Eine solche Kurve ist nämlich den Ausführungen des vorigen Paragraphen zufolge Berührungsschnitt der sämtlichen singulären Flächen der Komplexe:

$$\Sigma \frac{x_i^2}{a_i - \mu} = 0$$

und:

$$\frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1} + \frac{x_1^2}{a_1} = 0,$$

wo a_1 eine willkürliche Konstante bedeutet. Die letzte dieser beiden Gleichungen kann, wie leicht ersichtlich, auch in der allgemeineren Form:

$$\frac{x_2^2}{(a_2 - a_1) - \lambda_1} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1) - \lambda_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1) - \lambda_1} + \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda_1} = 0$$

geschrieben werden, in welcher λ_1 einen variablen Parameter bedeutet. Die Gleichung stellt alsdann ein Büschel von Büscheln konfokaler Komplexe zweiten Grades vor[109]), deren sämtliche singuläre Flächen allgemeine Kummer'sche Flächen sind, wenn die singuläre Fläche des Komplexes $f = 0$ eine allgemeine Kummer'sche Fläche ist. Denn alsdann haben die fünf Gleichungen[110]):

---

[108]) Kapitel III, § 4 vorliegender Arbeit.

[109]) Vgl. Reye, Über die Singularitätenflächen quadratischer Strahlenkomplexe und ihre Haupttangentenkurven. Crelles Journal, Bd. 77, S. 244 ff. — Unter „Büschel" ist hier einfach-unendliche Mannigfaltigkeit zu verstehen.

[110]) Um unmittelbar einzusehen, daß diese (16 parabolische und 16 Rückkehrhaupttangenten bestimmenden) Gleichungen (vgl. Kap. III, § 9 vorliegender Arbeit) die 16 Doppelpunkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche festlegen, schreibe man sie in der folgenden Form:

$$\Sigma x_i^2 = 0$$

$$f = \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda_1} + \frac{x_2^2}{(a_2 - a_1) - \lambda_1} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1) - \lambda_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1) - \lambda_1} = 0$$

$$F = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

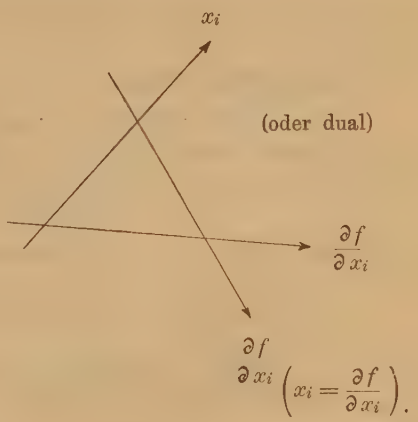
$$\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

32 von einander verschiedene Auflösungen.

Bezeichnet man mit Segre[111]) als *singuläre Kurve einer Kongruenz* die Kurve der Berührungspunkte ihrer singulären Strahlen mit der Brennfläche und als *konfokale Kongruenzen* solche, deren

---

$$\begin{cases} p(x_i) = 0 \\ f(x_i) = 0 \\ p\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0 \\ f\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0 \\ p\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\left(x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}\right] = 0 \end{cases}$$



Dabei ist zu beachten, daß wegen $(p = 0.\ f = 0) \equiv (f + \lambda p = 0,\ p = 0)\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine willkürliche Linie des Büschels $x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist, und daß:

$$f\left(x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \Sigma x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \equiv x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ist.}$$

[111]) l. c., S. 125.

Brennflächen einander längs einer und derselben für beide Kongruenzen singulären Kurve berühren, so kann man den zuletzt abgeleiteten Satz auch in Gestalt des folgenden, zuerst von Lie[112]) (auf ganz anderem Wege) bewiesenen Theorems aussprechen:

Ein Büschel konfokaler Komplexe zweiten Grades:

$$\Sigma \frac{x_i^2}{a_i - \mu} = 0$$

wird von jedem der sechs in ihm enthaltenen „Fundamentalkomplexe“[113]):

$$x_i = 0$$

nach einem Büschel konfokaler Kongruenzen der zweiten Ordnung und Klasse geschnitten. Denn diese Kongruenzen können als Doppeltangentensysteme der singulären Flächen der Komplexe:

$$\frac{x_1^2}{\mu - \mu'} + \frac{x_2^2}{a_2 - \mu'} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - \mu'} = 0$$

u. s. w. aufgefaßt werden.

Wir fügen endlich den Gleichungssystemen (I) und (II) noch die folgenden sechs Systeme von Gleichungen hinzu:

$$\begin{gathered}
\Sigma x_i^2 = 0 \\
x_1 = 0 \\
\frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1} = 0 \\
\frac{x_2^2}{(a_2 - a_1)^2} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1)^2} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1)^2} = 0 \qquad \text{(III)} \\
\frac{x_2^2}{(a_2 - a_1)^3} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1)^3} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1)^3} = 0.
\end{gathered}$$

Sie bestimmen je 16 ausgezeichnete Strahlen der sechs Doppeltangentenkongruenzen der Kummer'schen Fläche, welche den Linienflächen (II) der vierpunktig berührenden Strahlen angehören. Die durch sie und die ihnen zugeordneten geraden Linien $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bestimmten

---

[112]) Mathem. Ann., Bd. V, S. 255.

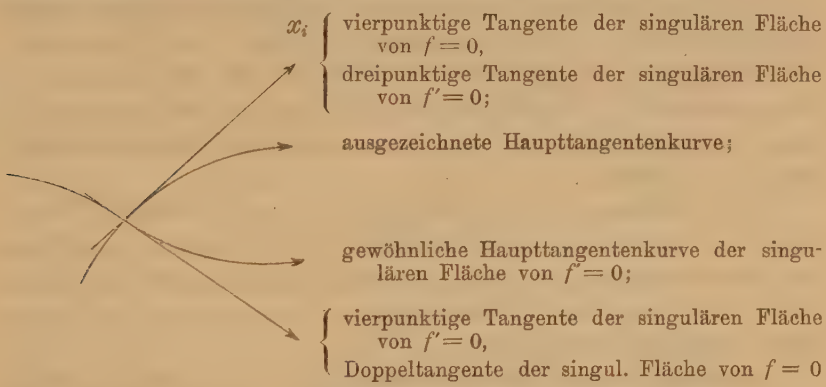
[113]) Klein, Mathem. Ann., Bd. II, S. 198 ff.

Büschel gehören der Kongruenz vollständig an. Denn jede der 16 Linien (III) kann als *gewöhnliche Haupttangente* der singulären Fläche eines Komplexes:

$$f' = \frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1} + \frac{x_1^2}{a_1 - a_1} = 0$$

aufgefaßt werden.

Da die singulären Flächen von $f = 0$ und $f' = 0$ einander nach einer für beide ausgezeichneten Haupttangentenkurve berühren, welche Bestandteil der Kurve der vierpunktigen Berührung beider Flächen ist, so folgt weiter, daß jede der 16 Linien x_i der Gleichungen (III) Tangente der ausgezeichneten Haupttangentenkurve und mithin parabolische bzw. Rückkehrhaupttangente der singulären Fläche von $f = 0$ ist:



(Dabei ist zu beachten, daß eine vierpunktig und vierebenig berührende Flächentangente i. a. stationäre Tangente einer Haupttangentenkurve ist.)

Es stellen daher die sechs Gleichungssysteme (III) *die* $6 \cdot 16 = 96$ *hyperoskulierenden Erzeugenden der Oskulationskegel der 16 konischen Knoten der singulären Fläche von* $f = 0$ *dar,* und zwar sind diese mit den ihnen dualistisch entsprechenden Linien identisch. Die 16 Doppelpunkte und Ebenen der singulären Fläche der Komplexe zweiten Grades bilden daher eine Konfiguration 16_6, welche man nach ihrem Entdecker als Kummer'sche Konfiguration bezeichnet.

Schreiben wir die Gleichungen (III) in der allgemeineren Form:

$$\sum x_i^2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$\frac{x_2^2}{a_2 - a_1 - \lambda_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1 - \lambda_1} + \cdots + \frac{x_6^2}{a_6 - a_1 - \lambda_1} = 0$$

$$\frac{x_2^2}{(a_2 - a_1 - \lambda_1)^2} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1 - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1 - \lambda_1)^2} = 0$$

$$\frac{x_2^2}{(a_2 - a_1 - \lambda_1)^3} + \frac{x_3^2}{(a_3 - a_1 - \lambda_1)^3} + \cdots + \frac{x_6^2}{(a_6 - a_1 - \lambda_1)^3} = 0,$$

so ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Die 16 singulären Punkte und Ebenen einer Kongruenz zweiten Grades sind mit den 16 Doppelpunkten und Doppelebenen ihrer Brennfläche, der Kummer'schen Fläche, identisch.

Die 16 Punkte, in welchen eine ausgezeichnete Haupttangentenkurve der Kummer'schen Fläche einer gewöhnlichen Haupttangentenkurve derselben (außer in den Doppelpunkten) *begegnet, sind Wendepunkte der gewöhnlichen Haupttangentenkurven und bilden eine Kummer'sche Konfiguration* 16_6. *Die Ebenen der Konfiguration sind mit den 16 durch die Schnittpunkte der Haupttangentenkurven bestimmten Schmiegungsebenen identisch.*

Eine beliebige Schmiegungsebene einer ausgezeichneten Haupttangentenkurve schneidet diese in weiteren fünf Punkten, welche mit dem Schmiegungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Die fünf Punkte gehören der durch den Schmiegungspunkt hindurchgehenden gewöhnlichen Haupttangentenkurve an.

Eine ausgezeichnete Haupttangentenkurve der Kummer'schen Fläche hat die Doppelpunkte derselben zu einfachen Punkten (im Gegensatz zu den gewöhnlichen Haupttangentenkurven [114]). *Sie berührt in ihnen je einen der 16 Kegelschnitte, aus welchen die parabolische Kurve besteht,* u. s. w.

Man sieht leicht, daß auf diesem Wege ohne nennenswerte Schwierigkeit noch eine Reihe anderer Sätze abgeleitet werden können. Wir gehen jedoch auf diese Dinge nicht weiter ein, weil die Resultate [115]) bekannt sind.

---

[114]) Siehe Kapitel III, § 8 vorliegender Arbeit.

[115]) Vgl. Sturm, l. c., Bd. III, S. 56. — Ferner: Klein und Lie, Über die Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Mathem. Ann., Bd, XXIII, S. 579 ff. — Vgl. auch Reye,

Kapitel VII.

Über Doppellinien eines Komplexes.

Wenn für einen Komplexstrahl x_i die sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho\, x_i$$

bestehen, d. h. wenn die Fläche $f = 0$ die Fundamentalfläche $p = 0$ im Punkte x_i tangiert, so bezeichnet man den Strahl nach Pluecker[116]) als Doppellinie des Komplexes $f = 0$. Eine Doppellinie ist für jede Komplexstrahlengruppe, der sie angehört, zweifach zählender Strahl. Sie ist daher für jede Komplexkurve, welche sie berührt, Doppeltangente, und dual für jeden Kegel, dessen Erzeugende sie ist, Doppelkante. Sind a_i die Koordinaten einer beliebigen geraden Linie a, welche den Doppelstrahl x_i schneidet, d. h. ist:

$$\sum a_i^2 = 0; \qquad \sum a_i x_i = 0,$$

so liefern die Gleichungen:

$$\sum c_i y_i = 0$$

$$\sum x_i y_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

$$\sum y_i^2 = 0$$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

$$\sum a_i y_i = 0$$

vier gerade Linien y_i, von denen zwei in der Ebene der Geraden x_i und a_i liegen und zwei durch ihren Schnittpunkt hindurchgehen. Sie bestimmen die Berührungspunkte der Komplexkurve der Ebene der Strahlen a_i und x_i mit ihrer Doppeltangente x_i und dual.

---

l. c. (siehe Anm. 109), S. 242. — Die dort geäußerte Ansicht: . . . „Sehr unzweckmäßig aber wäre es, wollte man auch bei der genaueren Untersuchung der mit den Komplexen verknüpften Flächen die Benutzung der Punkt- und Ebenenkoordinaten gänzlich vermeiden“ . . . scheint den obigen Ausführungen zufolge (vgl. auch Kapitel III, § 8 vorliegender Arbeit) kaum aufrecht erhalten werden zu können.

[116]) l. c., S. 296.

Für eine gewisse Zahl von Ebenen werden die Berührungspunkte einer Doppellinie mit ihren Komplexkurven zusammenfallen und dual. Die Bedingung hierfür besteht den Ausführungen von Kapitel III, § 3 zufolge in dem Verschwinden der Diskriminante der für μ kubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\mu & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & c_1 & x_1 & a_1 \\ f_{22} & f_{22}-\mu & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & c_2 & x_2 & a_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}-\mu & f_{34} & f_{35} & f_{36} & c_3 & x_3 & a_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}-\mu & f_{45} & f_{46} & c_4 & x_4 & a_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55}-\mu & f_{56} & c_5 & x_5 & a_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66}-\mu & c_6 & x_6 & a_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo: $$f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$ ist.

In Bezug auf die a_i ist diese Gleichung quadratisch, ihre nach λ genommene Diskriminante demnach vom Grade:

$$2 \cdot (3-1)\, 2 = 8.$$

Das gibt den Satz:

Eine Doppellinie eines Komplexes ist im allgemeinen für vier Komplexkurven Wendetangente und für vier Komplexkegel Rückkehrkante. Die Spitzen der vier Kegel koinzidieren *nicht* mit den vier Wendepunkten und dual.

Da ferner die Linie x_i, wenn sie Doppellinie von $f = 0$ ist, auch Doppellinie des konischen Polarkomplexes:

$$\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

ist, so folgt weiter, daß *das Doppelverhältnis der vier Ebenen der Komplexkurven mit Wendetangente, gleich dem Doppelverhältnis der vier Spitzen der Kegel* ist, für welche die Doppellinie Rückkehrkante ist[117]).

---

[117]) Für Komplexe zweiten Grades folgt weiter, daß auf einer Komplexdoppellinie (welche allgemein auch Doppelstrahl und Doppelachse der singulären

Den Lösungen y_i der Gleichungen:

$$\sum c_i y_i = 0$$

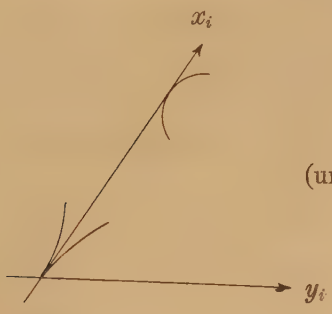
$$\sum x_i y_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

$$\sum y_i^2 = 0$$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} y_i y_k y_l = 0$$

zufolge ist eine *Doppellinie gleichzeitig für zwölf Komplexkegel, deren Spitzen mit den Rückkehrpunkten der Komplexkurven identisch sind, Doppel- und Wendekante* und dual:



(und dual)

Eine Doppellinie zählt daher in der Kongruenz der Undulationskanten bzw. Bicuspidalpunktstangenten zwölffach.

In der Kongruenz der Spitzentangenten der unistationären dreifachen Punkte von Komplexkurven zählt eine Doppellinie $4(n-4)(n+3)$-fach. Denn den Auflösungen y_i der Gleichungen:

$$\sum c_i y_i = 0$$

$$\sum x_i y_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

$$\sum y_i^2 = 0$$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

$$D(x_i y_i) = 0$$

zufolge, in welchen D die Diskriminante der Gleichung:

Fläche ist (vgl. Voß, l. c., S. 62)) vier Doppelpunkte und vier Doppelebenen der singulären Fläche der vierten Ordnung und vierten Klasse liegen. (Vgl. Segre, l. c., p. 135.)

$$f(\lambda) \equiv f(x_i + \lambda y_i) = 0$$

bedeutet, in welcher unter Voraussetzung von:

$$f = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0$$

die y_i im Grade $(n-4)(n+3)$ enthalten sind, *ist eine Doppellinie für* $4(n-4)(n+3)$ *Komplexkurven zugleich Doppel- und Doppelpunktstangente und dual.*

Das System der Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho\, x_i$$

zu denen noch die Gleichungen $p \equiv \sum x_i^2 = 0$ und $f = 0$ hinzutreten, läßt sich durch das folgende äquivalente System von sieben Gleichungen ersetzen, aus denen ϱ eliminiert ist:

$$\left.\begin{aligned} \sum x_i^2 &= 0 \\ f &= 0 \\ \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 &\equiv F = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} &= 0 \\ \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 &= 0 \\ \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} &= 0 \\ x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} x_k &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

deren letzte eine der $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Gleichungen repräsentiert, welche unter Voraussetzung von:

$$i \neq k = 1 \ldots 6$$

gebildet werden können. Bestehen die ersten drei der Gleichungen (1), so zerfällt der Kegel Φ der in der Fundamentalfläche $p = 0$ gelegenen $f = 0$ im Punkte x_i tangierenden geraden Linien in zwei Ebenen, welche die Verbindungsgerade der Punkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ miteinander

gemein haben. Ist auch die Bedingung $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ erfüllt, so geht der Kegel Ψ der $p = 0$ in x_i tangierenden und $f = 0$ oskulierenden geraden Linien durch die Schnittgerade der Ebenen Φ hindurch[118]). Sind die ersten fünf der Bedingungen (1) erfüllt, so berührt der Kegel Ψ eine der Ebenen Φ längs ihrer Schnittgeraden. Der Punkt $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ liegt alsdann in einer der beiden Ebenen Φ und die gerade Linie, welche $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ verbindet, tangiert den Kegel Ψ im Punkte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Befriedigen die x_i endlich auch die sechste der Gleichungen (1):

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

so daß die Gleichung (3) von Kapitel II identisch besteht, so zerfällt der Kegel Ψ in zwei Ebenen, welche die Schnittgerade der Ebenen Φ miteinander gemein haben. In diesem Falle oskuliert nämlich die Verbindungsgerade der Punkte x_i und $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ wegen:

$$f\left(x_i + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = f + \lambda \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\lambda^2}{2!} \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} + \cdots$$

die Fläche $f = 0$, was nur dadurch möglich ist, daß der Kegel Ψ zerfällt.

Bestehen die ersten fünf der Gleichungen (1), so entspricht dem Punkte $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ eine gerade Linie, welche wegen:

$$\Sigma x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = F = 0; \qquad \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

entweder in der Ebene der Strahlen x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ liegt oder durch ihren Schnittpunkt hindurchgeht. Ist das letztere der Fall und ist r_i eine beliebige, in der Ebene der Strahlen x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gelegene gerade Linie, so schneidet die durch die Gleichung:

---

[118]) Siehe Kapitel II, § 3 vorliegender Arbeit.

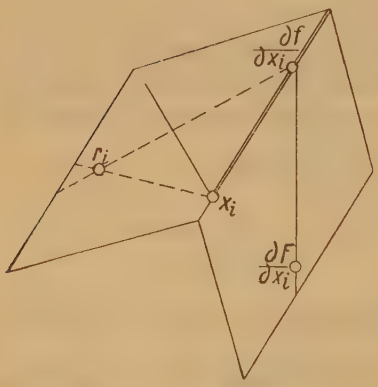
$$\Sigma \left(r_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(r_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

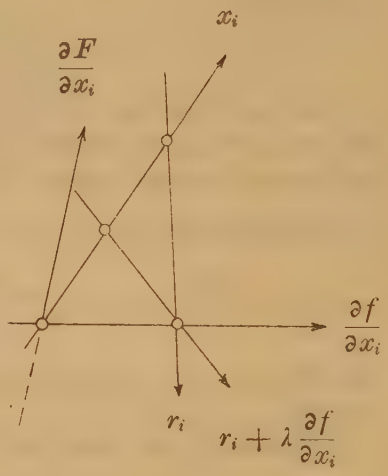
$$= \Sigma r_i r_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + 2\lambda \Sigma r_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

bestimmte gerade Linie $r_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ auf x_i den zweiten, nicht mit dem singulären Punkte koinzidierenden Berührungspunkt der Komplexkurve der x_i zugeordneten singulären Ebene mit ihrer Doppeltangente aus[119]). Dieser kann daher nur dann in den singulären Punkt hineinrücken, wenn:

$$\Sigma r_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

ist:



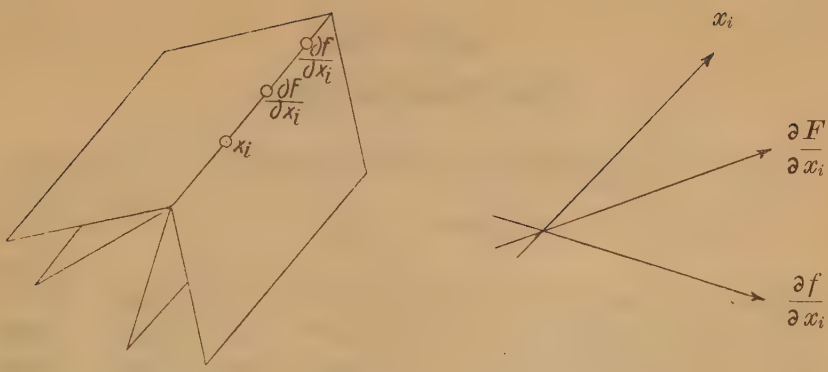


Hieraus folgt, was übrigens zu erwarten war, daß der Punkt $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, wenn der Kegel Ψ in zwei Ebenen zerfällt, welche die Schnittgerade der Ebenen Φ miteinander gemein haben, auf der Verbindungsgeraden der Punkte x_i und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ liegt, d. h. daß:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \mu x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ist:

[119]) Vgl. Voß, l. c., S. 145.



Die Koordinaten eines Komplexstrahles x_i brauchen daher nur noch eine der 15 Gleichungen:

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

zu erfüllen, wenn x_i Doppellinie sein soll.

Da außer $p = \sum x_i^2 = 0$ und $f = 0$ fünf Bedingungen erforderlich sind, damit ein Komplexstrahl eine Doppellinie ist, so besitzt der allgemeine algebraische Linienkomplex natürlich keine derartige Singularität [120]).

---

[120]) Ein einfaches Beispiel bildet der Reye'sche Komplex der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier kollokaler kollinearer Räume. Ist die Gleichung der Fundamentalfläche $p = 0$ in der ursprünglichen Form:

$$p \equiv x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$$

gegeben, so lautet die Gleichung des Reye'schen Komplexes bekanntlich:

$$f - a_1 x_1 x_4 + a_2 x_2 x_5 + a_3 x_3 x_6 = 0.$$

Wie man unmittelbar sieht, berühren $p = 0$ und $f = 0$ einander in den Eckpunkten des Koordinaten-Hexagons, welchen die sechs Doppelgeraden des Reye'schen Komplexes entsprechen. — Wir geben noch ein anderes Beispiel eines mit merkwürdigen Singularitäten behafteten Komplexes, das nach den Untersuchungen über die Kegel Φ und Ψ vielleicht einiges Interesse beanspruchen darf. Sind X, Y, Z lineare Funktionen der kartesischen Koordinaten x, y, z und X', Y', Z' Produkte von n-linearen Faktoren, so definieren die Gleichungen:

$$x' = X \pm i X'; \qquad y' = Y \pm i Y'; \qquad z' = Z \pm i Z'$$

einen algebraischen Linienkomplex vom Grade $n(n+1)$, wenn man als Erzeugende des Komplexes der Verbindungsgeraden der den Punkten x, y, z des

Kapitel VIII.

Über Flächenkomplexe.

Ist für einen singulären Komplexstrahl x_i:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \mu x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so bestehen umgekehrt die ersten sechs der Gleichungen (1) des vorigen Kapitels, d. h. der Kegel Ψ zerfällt in zwei Ebenen, welche die Schnittgerade der Ebenen Φ miteinander gemein haben. Gehört überdies diese Schnittgerade der Fläche $f = 0$ vollständig an, so besteht sowohl die der singulären Linie x_i zugeordnete Komplexkurve als auch der ihr zugeordnete Komplexkegel aus einem Doppelbüschel und einer Restkurve der $(n-2)^{\text{ten}}$ Klasse bzw. einem Restkegel der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Denn jeder Strahl des der Schnittgeraden der Ebenen Φ und Ψ entsprechenden Büschels zählt für jede Komplexstrahlengruppe der der singulären Linie x_i zugeordneten singulären Ebene und des ihr zugeordneten singulären Punktes doppelt.

Das ist nun insbesondere dann der Fall, wenn sämtliche Strahlen eines Komplexes Tangenten einer und derselben Fläche sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, daß sämtliche Komplexstrahlen singulär sind, d. h. daß ihre Koordinaten die Gleichung:

$$F = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

identisch erfüllen[121]). $F = 0$ ist dann notwendigerweise von der Form:

Raumes zugeordneten konjugiert imaginären Punkte x', y', z' betrachtet. Ein solcher Komplex enthält drei Systeme von ∞^1 Ebenen, die Parallelebenen zu den Koordinatenebenen, deren Komplexkurven aus n-Bestandteilen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse bestehen, welche je eine n-fache Tangente besitzen. Eine beliebige Parallelebene zu den drei Koordinatenebenen enthält daher eine Komplexkurve der $n(n+1)^{\text{ten}}$ Klasse, welche n n-fache und $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n+1)^2$ Doppeltangenten besitzt. Für $n = 1$ ergibt sich der Reye'sche Komplex der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier konjektiver affiner Räume.

[121]) Zur Geschichte dieses Satzes sei bemerkt, daß Cayley (Quarterly Journal, t. III, p. 227) als eine erste Bedingung, welcher die Koordinaten der

$$F \equiv f + qp = 0$$

und damit:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu x_i,$$

so daß nur noch zu beweisen ist, daß das durch einen beliebigen Komplexstrahl x_i mit seinem zugeordneten Strahle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bestimmte Büschel dem Komplex vollständig angehört.

Die Bedingung $F = 0$ fordert unter anderem, daß die in einem Punkte P von $f \equiv (p = 0,\ f = 0)$ an $f = 0$ gelegte Tangentialebene gleichzeitig die Fundamentalfläche $p = 0$ (in einem anderen Punkte) tangiert. Wenn sämtliche Tangentialebenen einer Kurve, welche auf einer gewöhnlichen Fläche zweiten Grades liegt, diese Fläche tangieren sollen, so muß die Kurve aus lauter geraden Linien bestehen. Durchläuft ein Punkt eine dieser geraden Linien, so dreht sich die Tangentialebene derjenigen Fläche, welche die Kurve aus der Fläche zweiten Grades ausschneidet, um die gerade Linie, und ihre Berührungspunkte mit der Fläche zweiten Grades erfüllen dieselbe gerade Linie.

Ganz analog liegen die Verhältnisse in der Fundamentalfläche $p = 0$. Ist P_1 mit den Koordinaten x_i ein beliebiger Punkt von $f \equiv (p = 0,\ f = 0)$, so berührt, wenn mit $p = 0$ und $f = 0$ $F \equiv \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$ identisch besteht, die den Punkt P_1 mit seinem zugeordneten Punkte P'_1 mit den Koordinaten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ verbindende gerade Linie die Fläche $f = 0$ und liegt ganz in $p \equiv \sum x_i^2 = 0$. Sie muß aber auch ganz in $f = 0$ gelegen sein. Zum Beweise denken wir uns durch die gerade Linie $P_1 P'_1$ zwei beliebige vierdimensionale Ebenen:

$$E_1 \equiv \sum a_i x_i = 0, \qquad E_2 \equiv \sum b_i x_i = 0$$

hindurchgelegt. Diese schneiden einander in einem dreidimensionalen

---

Strahlen eines Kurvenkomplexes zu genügen haben, die obige Differentialgleichung fand, während Pluecker (l. c., S. 336) den in Frage stehenden Satz für $n = 2$ bewies. Allgemein wurde der Satz zuerst von Herrn Pasch (Habilitationsschrift, 1870) und dann von Herrn Klein (Mathem. Ann., Bd. V, S. 288) ausgesprochen. Den ersten vollständigen analytischen Beweis gab Herr Voß (Göttinger Nachrichten, 1875, S. 107).

Raume, und $p = 0$ in einer in diesem Raume gelegenen allgemeinen Fläche des zweiten Grades:

$$p = 0, \qquad E_1 = 0, \qquad E_2 = 0.$$

Auf dieser Fläche befindet sich die gerade Linie $P_1 P'_1$ und eine diese Erzeugende der Fläche im Punkte P_1 tangierende Kurve der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$c \equiv (p = 0, \qquad f = 0, \qquad E_1 = 0, \qquad E_2 = 0).$$

Da sämtliche Punkte von f singulär sind, d. h. singulären Komplexstrahlen entsprechen, so ist auch der P_1 unendlich benachbarte Punkt P_2 von c singulär. Zwei beliebige unendlich benachbarte Punkte S_1 und S_2, denen singuläre Komplexstrahlen entsprechen, bestimmen aber zwei einander in einem (den Punkten S_1 und S_2 nicht unendlich benachbarten) Punkte S_0 schneidende gerade Linien $S_1 S'_1$ und $S_2 S'_2$[122]). Die geraden Linien $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ haben daher einen Punkt P_0 miteinander gemein, welcher in endlicher Entfernung von P_1 und P_2 gelegen ist. Es liegt daher auch die gerade Linie $P_2 P'_2$ ganz in dem dreidimensionalen Raume: ($E_1 = 0$ und $E_2 = 0$). Da sie überdies in der Fundamentalfläche $p = 0$ liegt, so müssen die geraden Linien $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ als konsekutive Tangenten einer Raumkurve, welche einen weiteren Punkt miteinander gemein haben, oder auch als unendlich-benachbarte, einander treffende Erzeugende einer allgemeinen Fläche zweiten Grades im Raume von drei Dimensionen zusammenfallen. Daraus folgt aber weiter, daß die gerade Linie $P_1 P'_1$ ganz in $f = 0$ gelegen ist. q. e. d.

$p = 0$ und $f = 0$ durchdringen einander daher in einer Mannigfaltigkeit, welche ∞^2 gerade Linien enthält. Jede Komplexkurve, welche einen Strahl der diesen geraden Linien entsprechenden Strahlenbüschel enthält, tangiert die Ebene des Büschels in seinem Scheitel, d. h. die Büschel sind die Tangentenbüschel einer Fläche n^{ten} Ranges, welche im allgemeinen von der gleichen Ordnung und Klasse sein wird. Natürlich kann sie unter Umständen zerfallen. Sie kann aber auch in eine Raum- oder ebene Kurve bzw. in eine abwickelbare Fläche oder einen Kegel degenerieren. Die Kriterien für die einzelnen Fälle lassen sich den Ausführungen des vorigen Kapitels zufolge der Gleichung:

---

[122]) Vgl. Kap. III, § 1 vorliegender Arbeit.

$$f(\lambda) \equiv \left(x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_i = x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i = x_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(x_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = 0$$

$$(i \neq k = 1 \ldots 6)$$

oder einer ähnlichen Gleichung entnehmen[123]), welche die in einem beliebigen Büschel enthaltenen Doppelgeraden des Komplexes bestimmt. $f(\lambda) = 0$ hat im allgemeinen Falle, in welchem die Strahlen des Komplexes eine nicht degenerierte Fläche umhüllen, naturgemäß zwei dreifache Wurzeln, welche den Haupttangenten entsprechen, während die einfachen Wurzeln den Doppeltangenten der Fläche zugeordnet sind.

---

[123]) Vgl. Voß, Göttinger Nachrichten, 1875, S. 110.

Lebenslauf.

Als Sohn des Gymnasialoberlehrers Professor Dr. phil. Heinrich Mohrmann am 24. April 1881 zu Hannover geboren, besuchte ich, Hans Mohrmann, daselbst zunächst das städtische Gymnasium Lyzeum I und dann das K. Kaiser Wilhelmsgymnasium, auf dem ich Ostern 1899 die Reifeprüfung bestand. Nach zweijährigem juristischen Studium in München und Berlin und halbjährigem naturwissenschaftlichen Studium in Göttingen studierte ich in München Mathematik.